Note of String Theory

Brook Tsui

May 2021

1 Preface

本文为我跟伍老师上一学期弦论课的笔记，内容包括玻色弦以及 CFT，主要使用的教材为 David Tong 的 note，参考教材为 Barton Zweibach 的 <A first course in string theory>。如有错误，请指正。

本文主要是对目前所学到的弦论知识框架做一个梳理，以供自己将来回顾。

2 量纲

2.1 自然单位制

我们“看不到”时间，但能“看到”空间，所以直觉地认为这二者不同，但狭义相对论告诉我们时间和空间可以相互转化，就像绕到侧面观察物体时，它的正面看起来就扁了，所以它们其实是一回事，我们自然不需要用两套不同的坐标描述它们。

既然时间和空间是一回事，那么速度就没有量纲了，我们取光速常数 C=1 作为单位转换中介，于是 1s 的长度是 3×10^8m。另一个有趣且重要的结果是：on-shell 条件变成：$E^2=P^2+M^2$，于是能量、动量、质量是一回事。

所有的尺寸统一成一个，所有的动力学量统一成一个，这已经足够令人惊异，但我们还可以更进一步，同样地处理另一个很重要的常数：$\hbar$，它的存在就表示量子效应，而它的量纲和 action 的量纲一样是 $\frac{ML^2}{T}$，因 T=L 而有 $[\hbar]=ML$，此时我们也令 $\hbar=1$，则 $M=\frac{1}{T}=\frac{1}{L}$。于是，尺度和能量也统一了。这点也可以从不确定性原理看：$\Delta x\Delta P\sim\hbar,\Delta t\Delta E\sim\hbar$，[x] 和 [P] 互为倒数，[t] 和 [E] 互为倒数。

另外很容易推得万有引力常数 G 的量纲是 M^{-2}，从量纲凑出 GM=r，这就是差到一个常数的黑洞史瓦西半径。

三大基本量纲 M，L，T 是一回事，我们可以用能量标定所有物理量：既然 $[E]=M=\frac{1}{L}$，则长度越小，时间越短，能量越大。1 米可以等价于 $10^{-7}ev$，而一个原子的尺度大概就是 10^3Gev，弦的尺度大概是 $10^{19}Gev$，即普朗克质量附近。高能物理之“高”即在于此，说白了其实是“小”和“快”。

2.2 Extreme？

当年 Planck 给出他的著名常量以后，发现用 G，$\hbar$，C 这三个常量能唯一构建出一些具有时间，长度，能量量纲的物理量：

$$l_{pl}=\sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}=1.6\times10^{-35}s$$
$$M_{pl}=\sqrt{\frac{\hbar C}{G}}=2.2\times10^{-8}kg$$

它们相应被称为 Planck 长度，Planck 质量等，除了数字上的极端外，我们可以做一点定性考察。

一个极微小物体的 Compton 波长，$\lambda = \frac{h}{mc}$，可以近似为其位置不确定度，若其恰好等于 Planck 长度，那么由不确定性原理可得到相应的动量涨落进而是能量涨落 $\Delta E = \frac{\hbar C}{l_{pl}} = \sqrt{\frac{\hbar C^5}{G}} = \frac{M_{pl}}{C^2}$ 恰好是 Planck 质量。

同时, 我们知道对一定质量的物体, 若其尺寸小于史瓦西半径 $R = \frac{2GM}{C^2}$ 就会坍缩成一个黑洞。涨落的质量对应的史瓦西半径 $R \sim \frac{GM_{pl}}{C^2} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$ 恰为它的 Compton 波长，所以这个物体将坍缩为一个黑洞。

我们就从量纲分析得到了一个非常有趣的结论：任何一个物体的尺寸小于普朗克长度时，能量的涨落就足够产生一个黑洞，使之坍塌。

黑洞的奇点是——至少是 GR 语境下——不属于时空流形的，也不能用现有的物理学确切描述，某种意义上来说，Planck 量似乎是我们物理学的理论极限.......

3 相对论性点粒子

大多数弦论的标准教科书都是从这里起手的，结论不再赘述，只提一个比较值得注意的点。

粒子的 4-速度，从狭义相对论里学到的来看，似乎 4-速度的大小总是精确的 1，然而这其实也是一种人为的规范。想象只有一根世界线，我们用 $\sqrt{-ds^2}$ 来表示线长，但并没有规定该用什么方式表示世界线上的时间。当我们选择固有时规范，让世界线上的时间 $\tau = \sqrt{-ds^2}$ 时，算出来的 4-速度才是 1，这相当于我们在线上划分时间区间总是均匀等距的，但显然这只是一种规范，我们可以任意划分时间间隔。这不会引起什么物理上的不同，因为所谓的 4-速度只是一种相对讨巧的说法，它不是真的什么速度。

4 STRING

4.1 In a Nutshell

点粒子是点，弦就是线。

什么样的线？有张力，能断开，能连接。

质点是一个模型，本身不存在于自然中，弦也是一样，它的世界面应当理解为一个某种具有形而上学味道的纯粹几何面，不需要诸如米之类的物理单位。

为了描述这个面上不同点，我们引入两个无量纲参数 τ 和 σ，它们就像坐标轴 X 和 Y 一样，没有实际意义，仅仅是一种命名。当然，最终我们还是要在真实世界中讨论弦，所以我们记弦的时空坐标为 $X^\mu(\tau, \sigma)$，所有诸如动量等物理上可以谈论的量都是直接依赖于 X^μ 而非 τ 和 σ。

一根经典的弦，不论再怎么稠密，其世界面实际上也总是一条条分离的世界线编织成的，基本单元还是世界线，但此处的弦是一个真正的不可再分的基元，没有内部结构，它的世界面就是一个完完整整的面。从这个世界面上的任何一个点都可以向各个方向做切线（世界线只有 4 速度方向），则必然有一些类空，尤其是对于以光速运动的弦，除了运动方向外的切线全部类空。弦上点的类空运动是“真实的”，但不是“物理的”，所以追踪一根弦上的点的运动是不可能的，也就不可能区分弦上不同的“点”，它就是一个整体。

4.2 Schwartz's List

关于弦论究竟做到了什么，近些年来的进展我不甚了解，至于之前的成果，我在这里转录一张 Schwartz 曾列的清单：

1：弦论为我们自动统一了所有的基本粒子，也统一了所有的力。它们都源自一种基本物体的振动。

2：弦论自动产生了规范场，它决定着电磁力和核力。这些都自然源自于开弦的振动。

3：弦论自动产生了引力子，它源自闭弦的振动；弦的任何量子理论都必然包含闭弦，结果我们就得到了引力与其他力的统一。

4：超对称弦论统一了玻色子与费米子，两者都是弦的振动，因而所有的力与粒子也统一起来了。

4.3 Nambu-Goto action

弦是一张世界面，仿照我们对于相对论性点粒子做的，我们先求出 4 维时空里的世界面面元，再通过量纲分析添加一些具有物理意义的系数最终得到作用量，其运动方程使得这个作用量（世界面面积）取极小。

欧式空间的面元表示为：$dA = dXdY sin\theta = \sqrt{dX^2dY^2 - (dX \cdot dY)^2}$（可以参考 Barton 的书，他画了几张很直观的图），用 Wick 旋转之直接得到时空面元：$dA = dXdY sin\theta = \sqrt{(dX \cdot dY)^2 - dX^2dY^2} = \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2} d\sigma d\tau$。第三步我们引入了弦世界面上的两个无量纲参数。

面元自然是面积量纲，而作用量在国际单位制下和 Planck 常量同量纲，所以我们需要乘一个量纲为 MT^{-1} 的系数。在弦论中，我们选择 $\frac{T}{C}$，其中 $[T] = \frac{[J]}{L} = MLT^{-2}$，是弦的张力系数，代表单位长度的能量，C 是光速。在自然单位制下，$[T] = L^{-2}$，引入与弦长平方有关的常量 α' 便有 $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$。

带上这个系数，并根据约定添一个负号，我们就得到了相对论性弦的第一个作用量 Nambu-Goto action:

$$S = -\frac{T}{C} \int \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2} d\sigma d\tau$$

4.3.1 α'

多说几句关于引入的那个与弦长平方有关的量 α'。

弦论一开始并不是作为量子引力理论提出来的，而是为了解释强子相互作用引入的。强子包括了介子、质子、中子等粒子，由胶子作为媒介相互作用。上个世纪，人们发现，若以角动量（单位为 $\hbar$）为纵轴，M^2（M 的单位为 GeV）为横轴，则任意一个强子的激发态都在一条直线上，且不同强子所对应的直线斜率都相同，叫做 Regger 斜率，在自然单位制下很容算出斜率的量纲就是 L^2，其实就是 α'。

但这跟弦论有什么关系呢？仔细考察上述那个不寻常的线性关系：旋转强子时，其能量总是按比例一份份的增加，这就表明强子其实是有更小的结构的。实验表明，当强子转起来以后，变得像是一根弦，弦的能量是分立的，所以就解释了上述数据。

虽然在 Susskind 等人正准备在这个弦上大展身手的时候，猛人 Gell-Man 提出了 QCD，把所有人的注意力都吸引了过去，但我们确实还是有了以弦为基石的理论，当然，这个弦的大小至少是在强子尺度的，也就是 $10^{-15}m$。

5 Polyakov Action

5.1 Guess Out One

尽管 Nambu-Goto action 很成功地描述了相对论性弦，但是根号的存在为我们的量子化带来了困难，我们要想办法去掉这个东西。先改写 Nambu-Goto action 的主要部分为：$\sqrt{-\gamma}$，其中 $\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial X}{\partial \epsilon^\alpha} \cdot \frac{\partial X}{\partial \epsilon^\beta}$。

一般流形的体积元都需要一个张量密度 $\sqrt{|h|}$，即其上度规行列式开方，此处的流形就是弦的世界面，所以我们也需要一个世界面上的度规 $h^{\alpha\beta}$。以一种不严谨的方式看待原本的作用量——它是一个根号，看做 $\frac{A}{\sqrt{A}}$ 型，而体积元需要一个根号 $\sqrt{A}$，若要保证整体形式是一根号，我们在后面跟一个 $\frac{A}{A}$ 型的量，粗略的来说，所谓的 $\frac{A}{A}$ 可以看做上下指标缩并，在保留 x^μ 的情况下，我们可以猜测后面的部分应该是 $h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu$。

在自然单位制下，这一部分的量纲是 L^2，而 S 是无量纲的，所以我们需要前面提到的 T，配以约定的常数，我们就给出了在弦理论中使用最多的 Polyakov action：

$$S = -\frac{T}{2}\int \sqrt{-h}h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu d\sigma d\tau$$

但在这里我们先不打算直接解它，我们要用规范变换化简它。

5.2 Gauge

Mathematically different but physically identical。

有这样一个例子：如果某个世界的居民只懂得复数，那么他们对于长度的丈量就有冗余——因为 z=|z|$e^{i\theta}$，|z| 表示长度，后面的幅角在此语境下无用，取什么都可以，某位物理学家发现了这个现象，并称之为“长度具有幅角规范不变性”。这是由于描述的方法所带来的的冗余度，我们无所谓规不规定它们的取值或形式，但对于这个例子而言，如果取 θ=0，那么实际上就回到了实数系，这很大程度上简化了对长度测量和描述。

所以我们可以选择一个好的规范去简化理论。

当然，可以做什么样的规范变化同时取决于物理对象和数学手段，当我们用拉格朗日量这样的局部视角去描述物理系统时，它天然就有冗余度，如乘一个常数并不改变运动方程。一个重要的例子是电磁场，我们知道微分形式下的电磁场张量 F=dA，如果 A 后面跟一个 1 形式 dX，那么 F=d（A+dX）=dA，所以电磁场具有规范不变性。

但必须有冗余不可吗？不引入 A，直接用 F 这样没有冗余的描述不可以吗？原则上都可以，但引入适当的冗余度可以简化理论。比如我们描述电磁场与标量场耦合时用到了：$\phi^* A_\mu \partial^\mu \phi$，如果坚持只用 F，形式就会变得异常复杂。

Noether 定理告诉我们连续对称性总有对应的守恒量，那么对于连续的规范对称性有守恒量吗？要分情况。一般我们利用 Noether 定理的时候，前提总是 global 的对称性，也就是对于每一点都一样的对称性或者变换，比方说 Lorentz 变换对时空中所有点进行的变换都一样。规范对称性可以 global 也可以 local，比方说上面的电磁场的例子里，X 肯定是一个因地制宜的变量，否则 dX≡ 0，所以它是 local 的，并没有守恒荷。“对称性” 这个名字有点被滥用了，规范对称性最好叫做规范不变性或者规范自由度。

具有规范不变性的场就是规范场，除了电磁场外，引力场也是——因为时空不因坐标而变（广义协变性原理），所以差一个微分同胚（local 的变换）的度规描述的是同一个引力场。

现在回到 Polyakov action，我们发现由于存在 $\sqrt{-h}h^{\alpha\beta}$ 的结构，做 $h'^{\alpha\beta} = \Omega^2 h^{\alpha\beta}$（Ω 可以是常数也可以是 X 的函数，但前者很平庸，我们现在只考虑后者），则 $\sqrt{-h}$ 给出一个 Ω^2，$h^{\alpha\beta}$ 给出一个 Ω^{-2}，两个因子相互 cancel，最后保证了 action 不变，这种规范不变性被称作 Weyl 不变，它属于共形变换，是一个保角变换：$\frac{h'(X,Y)}{h'(M,N)} = \frac{h(X,Y)}{h(M,N)}$。

5.2.1 Gauge：Advance

规范场其实是一个很精妙而复杂的东西，像 Yang-Mills 场其实就是一种规范场，可以说现代物理学的场都基于规范场描述的，单写一本书来讲也不见得足够。这里单开一小节来细说，算是一个学习笔记，不过跟本课程的内容关系目前不是很大，可以跳过，不想另开一个 note，所以塞到这。

实际上，如果我们反过来看，我们说一个理论具有某种规范不变性之后，基本就能够完全确定定律的形式了：在那个复数世界居民的例子中，如果我们“预先”知道长度具有幅角规范不变，那长度一定是一个实数，另外一个数系。而在电磁学里，如果我们要求 A 具有增加一个全导数不变的规范自由度，那场必然只能是 dA。

在这些意义上，局域的规范对称性决定场，相对应的整体的对称性给出守恒荷，而守恒荷是场的源。

QED 里，电磁相互作用通常是用一个标量场 ϕ 和 A_μ 耦合表示的，其

Lagrangian 是：$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi - \frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$，$\phi$ 一般要求有相位不变性，也就是 $\phi \Rightarrow e^{i\theta}\phi$ 保持 $\mathcal{L}$ 不变，当 θ 是常数的时候，这显然成立，可以计算这个时候的守恒流，最后能够得到一个耦合常数，就是 e，即电荷守恒，而如果 $\theta = \theta(x)$，带入 $\mathcal{L}$ 就会乱成一团，若还要保持 $\mathcal{L}$ 的形式，只能修改协变导数：

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}d\theta$$
$$\nabla_\mu = \partial_\mu + ieA'_\mu$$

于是，$\nabla_\mu\phi' = \partial_\mu\phi' + ieA'_\mu\phi' = i\partial_\mu\theta e^{i\theta}\phi + e^{i\theta}\partial_\mu\phi + e^{i\theta}ieA_\mu\phi + ie\frac{1}{e}d\theta e^{i\theta}\phi = e^{i\theta}\nabla_\mu\phi$，$\mathcal{L}$ 便得以保持。

从某种意义上来说，当相位是随时空而变的时候，它就像一个场，这个自由度使得 Klein-Gordon 场的行为偏离了原本的方程，需要一个新的场来平衡它，这就自然引出了规范场。

所以，再一次看到，整体规范不变是相位变换中的角度取常数，它最后给出电荷守恒，而局域的规范不变给出相互作用的形式。

不过引力场要更加 subtle，尽管局部的微分同胚不变性给出爱因斯坦场方程，整体的 Poincare 微分同胚不变性给出作为场荷的守恒的能动量张量，但局部的微分同胚并不是整体 Poincare 变换的简单局域化，不是简单地在常数变换矩阵元后面加个括号写成坐标的函数就完事了，事实上，局域的微分同胚允许的类型非常广泛，比方说包括共形变换，大大超过整体的同胚类型，并且就目前来说，似乎只有能量和动量（也就是 Poincare 群的平移部分）起着荷的作用，角动量，也就是 Lorentz 群作为整体微分同胚对应的守恒荷并不起引力源的作用。

5.3 共形平坦

在二维流形中有一个很重要的结论：二维广义黎曼流形总是局域共形平坦的。也就是说任何它的度规至少局部满足 $g_{\mu\nu} = \Omega^2\eta_{\mu\nu}$。

下面我们来证明它：

首先，找一个 1 形式 Y_b，并做它的 Hodge 对偶，于是我们得到了另一个 1 形式：$X_a = \epsilon_a^b Y_b$，以这两个 1 形式为对偶基，则度规的交叉项分量 $g^{\mu\nu} = g^{ab}X_aY_b = g^{ab}\epsilon_a^cY_cY_b = \epsilon_{ac}Y^aY^c = 0$，而纯项分量 $g^{00} = g^{ab}X_aX_b = g^{ab}\epsilon_a^cY_c\epsilon_b^dY_d = g^{ab}\epsilon_{ca}\epsilon_{db}Y^cY^d = \epsilon_c^d\epsilon_{db}Y^cY^d = -g_{cb}Y^cY^b = -g^{11}$，所以有：

$g^{ab} = g^{11}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，认为 g^{11} 就是共形因子 Ω^2，所以这样的二维流形总是共形平坦的。

“局域性”的要求在于要限制在能定义 X 和 Y 的那些开集上，一般来讲我们只能在 coordinate patch 上平坦化它们，整体的几何还需要别的信息，不过目前的讨论里我们没有加入任何引力场的耦合，要求它整体是平坦的可以接受。对于更高维的情况来说，因为 1 形式的对偶不再是 1 形式，所以没法用这样几个形式做对偶基，也就不存在这种特殊性质。

进一步来说，假定在一个 2D 维时空中有 D 维反对称张量 T，只要度规是对称的，它的 Hodge 对偶 T* 与之缩并总是 0，这实际上表明这两个抽象的张量在某种几何意义上正交，这一点在弦的 T 对偶里很有用。

5.4 Final Fantasy

既然弦的世界面是一个二维流形，所以它也是共形平坦的，既然如此，我们就用 $\Omega^2\eta_{\mu\nu}$ 代替 $h_{\mu\nu}$，并且基于我们上面的讨论，前面的共形因子消掉了，所以最终，我们可以把 Polyakov action 写成一个非常简洁的形式：

$$S = \frac{T}{2}\int (\partial_\tau x)^2 - (\partial_\sigma x)^2 d\sigma d\tau$$

这就是弦作用量的最终版本。

5.5 Noether Theorem

不需要解方程，仅仅从 action 以及它所遵从的对称性入手，就可以得到守恒量。

Noether 定理告诉我们连续变换对称性有对应的守恒荷，描述连续变换对称性的数学对象就是李群，所以 Noether 定理也即李群的生成元跟守恒的物理量一一对应。比方说旋转对称由 SO（3）描述，三个生成元 L_i 在坐标基下可以对应到三个方向的守恒角动量。

5.5.1 Poincare Symmetry

任何物理定律首先要 Lorentz 不变，但 Lorentz 群只有 6 个生成元，而 SR 语境下的闵氏时空是最大对称 4 维流形，应该有 10 个 killing 矢量，所以在闵氏时空里的完整的对称性应该由比 Lorentz 群更大的群——Poincare

群来描述。这其实也好想，因为我们惯常说的 Lorentz 变换其实是两支 SU (2) 的直和，描述了所谓的 boost 和 rotation，这都是 “旋转”，但没有提到 “平移”，Poincare 群就是把 4 个方向的平移加进去了。

注：这里所说的 “4 个方向的平移” 应该理解为坐标原点的平行挪动 (也就是一般意义上的物理定律在时空各处都应该一样)，而不是匀速直线运动，后者对应的是 boost。

无穷小的 Poincare 变换为：

$$\delta x^\mu = M^\mu_\nu x^\nu + b^\mu,$$

$$M_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & K_1 & K_2 & K_3 \\ -K_1 & 0 & J_3 & -J_2 \\ -K_2 & -J_3 & 0 & J_1 \\ -K_3 & J_2 & -J_1 & 0 \end{pmatrix}$$

为无穷小洛伦兹变换，换句话说就是洛伦兹变换的生成元矩阵，其中 K_i 是三个 boost 生成元，J_i 是三个 rotation 生成元，显然，这是个反对称矩阵。

对应的角度矩阵 $\omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ -\phi_1 & 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\phi_2 & -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ -\phi_3 & \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix}$,

对应的群元是 $e^{-i\frac{\omega_{\mu\nu}}{2}M^{\mu\nu}} = e^{-i(\vec{K}\cdot\vec{\phi}+\vec{J}\cdot\vec{\theta})}$。关于 Poincare 群或者 Lorentz 群的相关知识可以查阅任何一本物理系的群论教科书，不再多述。

5.5.2 守恒荷

X 无穷小的变分可以看出是分成了两部分：旋转和平移，这两部分处理的方法不太一样，所以我们分开来看，先是平移部分。此时 action 的变分为：

$$\begin{aligned}\delta S &= -\frac{T}{2}\int d\tau d\sigma \delta(\eta^{\rho\sigma}\partial_\rho X\cdot\partial_\sigma X) = -T\int d\tau d\sigma \eta^{\rho\sigma}\partial_\rho \delta X\cdot\partial_\sigma X \\ &= T\int d\tau d\sigma \eta^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_\sigma X\cdot\delta X \\ &= \int d\tau d\sigma \partial^\rho(T\partial_\rho X)\cdot b \\ &= 0\end{aligned}$$

所以我们有守恒的 4 动量（密度）$p_\rho^\mu = T\partial_\rho X^\mu$，相应的守恒荷是：$P^\mu = \int d\sigma T\partial_0 X^\mu$，注意，这里我们用的是 $\partial_0 X^\mu$，也就是只考虑 τ 分量，因为根据流形上的 Stokes 定理，$\int_V \partial^\rho\partial_\rho X dv = \int_S \partial_\rho X ds \equiv 0$，自然得不到什么有物理意义的东西。

然后是旋转部分：

$$\begin{aligned}
\delta S = -\frac{T}{2}\int d\tau d\sigma \delta(\eta^{\rho\sigma}\partial_\rho X\cdot\partial_\sigma X) &= -T\int d\tau d\sigma \eta^{\rho\sigma}\partial_\rho\delta X\cdot\partial_\sigma X \\
&= -T\int d\tau d\sigma\eta^{\rho\sigma}\partial_\rho(M_{\mu\nu}X^\nu)\partial_\sigma X^\mu \\
&= -T\int d\tau d\sigma\eta^{\rho\sigma}(M_{\mu\nu}\partial_\rho X^\nu\partial_\sigma X^\mu + \partial_\rho M_{\mu\nu}X^\nu\partial_\rho X^\mu) \\
&= -\frac{T}{2}\int d\tau d\sigma\eta^{\rho\sigma}(\partial_\rho M_{\mu\nu}X^\nu\partial_\sigma X^\mu - \partial_\rho M_{\nu\mu}X^\nu\partial_\sigma X^\mu) \\
&= \int d\tau d\sigma\partial^\sigma M_{\mu\nu}[-\frac{T}{2}(X^\nu\partial_\sigma X^\mu - X^\mu\partial_\sigma X^\nu)] \\
&= \int d\tau d\sigma\partial^\sigma M_{\mu\nu}J_\sigma^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

于是有守恒流 $J_\sigma^{\mu\nu}$，相应的守恒荷就是 $J_0^{\mu\nu}$ 沿着 σ 积分。从它的表达式可以看出，它实际上能够分成两部分，一部分是质心角速度，一部分是弦的振动项带来的。

其实，如果我们把之前得到的守恒动量表达式 $P^\mu = T\partial_0 X^\mu$ 带进去，就会发现 $J^{\mu\nu}$ 长得和角动量算符一模一样，其实这也可以理解，因为 Noether 定理告诉我们生成元和守恒量间的对应关系，那么我们从 Lorentz 群的两种“旋转”对称性推出来的守恒量自然对应了的“角动量”。

有人把 boost 也因此翻译为“伪旋转”，但其实大可不必，回想刚体力学的 Euler 定理，平移跟旋转可以相互转化，这二者本来就区别不大。

6 运动方程

在直接用用分离变量找通解，然后根据不同边界条件确定系数和常数更加简单，但是不容易看出左右行波，不利于后面使用光锥坐标。所以我们还是采用行波法去解，但可以用分离变量练练手。

6.1 对称性决定运动

我们最需要的是运动方程，不过仔细想想，action 里的两个度规都是平直的，这意味着弦的运动在时空上是对称的，运动方程必须把这个性质反应出来，所以它应当是动量守恒：

$$\partial_\alpha \partial^\alpha X^\mu = 0$$
$$\partial_\tau^2 X^\mu - \partial_\sigma^2 X^\mu = 0$$

根相对论性点粒子有所不同的是，通常意义上的动量是荷，

这样看来，弦的运动方程和波很像，利用行波法：我们取 $A=\tau+\sigma, B=\tau-\sigma$，则根据链式法则有：

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} = \frac{\partial x^\mu}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{\partial x^\mu}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial \tau} = \frac{\partial x^\mu}{\partial A} + \frac{\partial x^\mu}{\partial B}$$
$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} = \frac{\partial x^\mu}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial \sigma} + \frac{\partial x^\mu}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial \sigma} = \frac{\partial x^\mu}{\partial A} - \frac{\partial x^\mu}{\partial B}$$

可以照猫画虎求出二阶导数，带回到原式中会得到：

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial A \partial B} = 0$$

所以 $\frac{\partial x^\mu}{\partial A}$ 应该只是 A 的函数，即 $\frac{\partial x^\mu}{\partial A} = f(A)$，同理有 $\frac{\partial x^\mu}{\partial B} = g(B)$，所以综合来说通解是：

$$x^\mu = \frac{1}{2}[f^\mu(\tau+\sigma) + g^\mu(\tau-\sigma)]$$

按照惯常的叫法，f 代表左行波，g 代表右行波，这两个方向的区别是一个非常重要的地方，因为在开篇我们说过，弦是可以分裂和连接的，但过程前后必须保证方向的连续，两根同方向的弦可以连接成一个圈，所以我们意识到弦有两种，开弦和闭弦。我们规定，开弦长度为 π，即 σ $[0,\pi]$，而闭弦为 2π，即 $X^\mu(\tau,\sigma) = X^\mu(\tau,\sigma+2\pi)$，后面章节会具体看到这种选择是如何简化我们的计算的。比方说对于闭弦，左右行波跟顺逆时针是一样的，同

为顺时针的闭弦可以连在一起形成一个更大的顺时针闭弦，但方向相反的则不行。

不过要注意，这两个方向的行波有一定对称性，也就是只有左行波的时候，跟只有右行波是一样的。这很像正负电荷，如果我们把所有电荷都反过来，化学性质是不变的，然而正负电荷确实相异。

到这一步我们求出通解了，更进一步就要求给定边界条件了，而 action 视角优于运动方程视角的部分原因就是它可以给出边界条件，所以我们仍然要对 Polyakov action 进行变分，目的是找到弦的边界条件，从中我们将得到一个非常非常重要的东西——D brane。

6.2 我开了，我闭了

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{T}{2}\int 2\partial_\tau x\partial_\tau\delta x - 2\partial_\sigma x\partial_\sigma\delta x d\tau d\sigma \\ &= T\int d\sigma[\partial_\tau x\delta x]_0^\tau - T\int d\tau[\partial_\sigma x\delta x]_0^\sigma - T\int\partial_\tau^2 x - \partial_\sigma^2 x d\tau d\sigma\end{aligned}$$

一般来说，我们总是固定弦运动的初末时刻，所以第一项为 0，第三项给出运动方程，如果要让第二项为零，意味着 $\partial_\sigma x\delta x|_0 = \partial_\sigma x\delta x|_\sigma = 0$，这有许多种不同的可能：

$$\partial_\sigma x|_0 = \partial_\sigma x|_\sigma = 0 \tag{1}$$

$$\delta x|_0 = \delta x|_\sigma = 0 \tag{2}$$

$$\partial_\sigma x\delta x|_0 = \partial_\sigma x\delta x|_\sigma \tag{3}$$

$$\partial_\sigma x|_0 = \delta x|_\sigma = 0 \tag{4}$$

and so on...

(1) 和 (2) 给出的是开弦条件，(3) 给出的是闭弦条件，至于 (4) 以及可能的 (5)、(6)、(7) 等等，就是混合型了。接下来我们来仔细看看这些条件。

6.3 Open String

顾名思义，开弦就是两个端点没有连在一块，为什么？因为 (1) 和 (2) 条件是说里两个端点处的情况各自为 0，所以原则上不相关。

6.3.1 Neumann Boundary Condition

(1) 条件学名叫 Neumann 边界条件, 意思是给出边界处的法向导数, 但这并没有对弦的运动做出什么限制，因为 σ 是一个抽象的参数，不代表真实的物理时间，但即便是真实的物理量，比方说 $\frac{\partial y}{\partial x}|_{endpoint}=0$，它也只是要求在边界上平滑地连接，而对于 y 的值没有任何限制。

我们来看看在这个条件下运动方程长成什么样子:

6.3.2 弦是一只猴子？

(2) 条件的学名叫 Dirichelet 边界条件, 但为啥这个子标题不跟 5.3.1 统一？因为在这个边界条件下的弦的运动总让我有一种看猴子的感觉......

所谓 $\delta x=0$ 意味着 x 的值是确定的，固定的，所以它意味着 x 有几个坐标不能变，就像一只在树上爬上爬下的猴子，不论它的 Z 坐标怎么变，X 和 Y 坐标始终是固定的。在弦论里，我们把这颗树（或者它的其他维度亲戚）叫做 D 膜，D 是 Dirichelet 的意思，弦的两个端点固定在这些膜上，以至于它只能在膜上运动，而不能离开它。

从而有 Polchiski 的卓越洞见：膜就是弦的一部分！

现在我们来具体处理它。

6.4 Closed String

$$X_R^\mu(\sigma^-)=X_0^\mu+\sqrt{2\alpha'}a_0^\mu\sigma^-+i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq0}\frac{a_n^\mu}{n}e^{-in\sigma^-}$$

$$X_L^\mu(\sigma^+)=X_0^\mu+\sqrt{2\alpha'}a_0^\mu\sigma^++i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq0}\frac{\tilde{a}_n^\mu}{n}e^{-in\sigma^+}$$

把这两个家伙加起来，最后，我们就得到了闭弦的解:

$$X^\mu=X_0^\mu+\sqrt{2\alpha'}a_0^\mu\tau+i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq0}\frac{e^{-in\tau}}{n}(a_n^\mu e^{in\sigma}+\tilde{a}_n^\mu e^{-in\sigma})$$

7 闭弦量子化

回忆我们是怎么量子化谐振子的？我们先有了 x 和 p 的对易关系，再将哈密顿量写成 $\hat{a}\hat{a}^\dagger$ 的形式，然后让这个东西作用在基态上，得到一系列分立的谱，也就是不连续的能量本征值。说白了就是构建本征值和本征矢。弦论中，我们的做法一样。

p.s. 从现在开始就已经进入了数学运算非常繁杂的部分，其技巧确实很重要，所以我会尽量补全步骤。

7.1 先学会走再学会跑

尽管我们是要量子化弦，但先从经典的地方入手比较好接受一点，而且后面的计算可以看出，经典的情况会为我们提供很多思路。（退一万步来说，从经典到量子的的标准模板早就明明白白放到那了，抄作业也好抄啊）

7.1.1 Poisson Bracket

按照之前写的思路，我们先把 P 求出来。

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^\mu = T_0\dot{X}^\mu &= T_0[\sqrt{2\alpha'}a_0^\mu + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_n(a_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} + \tilde{a_n^\mu} e^{-in(\tau+\sigma)})] \\ &= \frac{p^\mu}{2\pi} + \frac{1}{2\pi\sqrt{2\alpha'}}\sum_n(a_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} + \tilde{a_n^\mu} e^{-in(\tau+\sigma)})\end{aligned}$$

其中 $T_0 = \frac{1}{2\pi\alpha'}, \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}p^\mu = a_0^\mu$。

可以把上式按照两个 “+” 看成三部分，则 $\{\mathcal{P}^\mu, \mathcal{P}^\nu\}$ 给出九个部分。由于对 n 的求和是遍历全部整数的，所以实际上可以任意更改 n 的正负，也就是 $\sum_n = \sum_{-n}$，我们用这样的技巧把各指数项中 σ 的部分提出来，根据提出来的部分的不同可分为 4 类。因为 τ 和 σ 是任意函数，所以不同的指数项对应的部分是正交的，$\{\mathcal{P}^\mu, \mathcal{P}^\nu\} = 0$ 意味着这 4 类都是 0，这里直接给

出结果:

$$
\begin{gathered}
\{p^\mu, p^\nu\} = 0 \\
[\{p^\mu, a_n^\nu\} e^{-in\tau} + \{p^\mu, \tilde{a}_{-n}^\nu\} e^{in\tau}] e^{in\sigma} = 0 \\
[\{a_m^\mu, p^\nu\} e^{-im\tau} + \{\tilde{a}_{-m}^\mu, p^\nu\} e^{im\tau}] e^{im\sigma} = 0 \\
[\{a_m^\mu, a_n^\nu\} e^{-i(m+n)\tau} + \{\tilde{a}_{-m}^\mu, \tilde{a}_{-n}^\nu\} e^{i(m+n)\tau} + \\
\{\tilde{a}_{-m}^\mu, a_n^\nu\} e^{-i(-m+n)\tau} + \{a_m^\mu, \tilde{a}_{-n}^\nu\} e^{i(m-n)\tau}] e^{i(m+n)\sigma} = 0
\end{gathered}
$$

对于 $\{X^\mu, X^\nu\} = 0$ 以及 $\{\mathcal{P}^\mu, X^\nu\} = 0$ 也进行一样的分类，但值得注意的是，对质心动量和位置：$\{p^\mu, X_0^\nu\} = \eta^{\mu\nu}$。

最终，把这三大 Poisson 括号下的各个项按照不同的 σ 指数项进行消元化简，最终得到的是：

$$\{a_m^\mu, \tilde{a}_n^\nu\} = 0 \tag{5}$$

$$\{a_m^\mu, a_n^\nu\} = \{\tilde{a}_m^\mu, \tilde{a}_n^\nu\} = im\eta^{\mu\nu}\delta_{m+n,0} \tag{6}$$

7.1.2 弦的能动量张量

我们之所以突然掉头去研究弦的能动量张量，是因为这个东西的性质会对我们的解做出一个很强的限制。

能动量张量 $T_{\alpha\beta}$ 的意义在任何一本场论书籍中都能得到详细介绍，在此不多赘述。不过那种用 action 和度规来表示它的形式尤为重要，我们以 GR 的 Hilbert action——$S_H = \int d^D x\sqrt{-g}R$——为例来说明这一点。

对它变分并丢掉边界项得到是：$\delta S_H = \int d^D x\sqrt{-g}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu}$，括号里面那一项就是无源区的 Einstein 场方程。这里最重要的是“无源”，也就是那个方程实际描述的是时空本身怎么运动的，正儿八经的“运动定律”，换句话说这时候的作用量并不包含“源”的信息。

不过 action 作为我们理论的拱顶石，当用包含了物质部分的完整 action——$S = \frac{1}{16\pi G}S_H + S_M$——代替 Hilbert action 时，变分也应该给出完整的 Einstein 场方程：$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$，所以猜测 $\delta S = \int d^D x\sqrt{-g}\frac{1}{16\pi G}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - 8\pi GT_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu} = 0$，对比后自然得到：$T_{\mu\nu} = -2\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}$，即用 action 和度规表示的能动量张量。从中可以得到一个很重要的思想，即对度规的变分给出在那个度规所对应的时空里的运动方程和相应的能动量张量。

（digression：除了 GR 以外的物理理论都是平坦时空，它们的守恒性都是依赖于 ∂ 而非 $\bigtriangledown$，在弯曲时空中，协变导数为 0 并不是通常意义上的守恒，因为联络的存在表明我们把引力场的作用考虑进来了，物质本身的能动量其实不守恒，但引力场的贡献也不能简单地理解为引力势能，因但引力场本身的能动量写不出来，它局域下总是 0。所以协变导数为零并不严格意味着物质的能动量守恒。其实从微分形式来说，只有 $\partial = 0$ 才表示边界无贡献。）

现在回到 Polyakov action，它对 X 的变分给出的是在 target space 里的运动方程，而沿用 GR 的思想，对 $g^{\alpha\beta}$ 的变分给出来的是弦世界面所在时空的引力方程，或者用我们熟悉的话说，就是弦本身的运动，而已经证明了弦是共形平坦的，所以相当于没有外场，则能动量自然是零。这个不平凡的结论其实给出了对方程的限制。此时：

$$\begin{aligned}T_{\alpha\beta} &= -\frac{2}{T}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} \\ &= \partial_\alpha X\cdot\partial_\beta X - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\gamma\rho}\partial_\gamma X\cdot\partial_\rho X\end{aligned}$$

或者用光锥坐标改写为：

$$\begin{aligned}T_{++} &= (\partial_+ X)^2 = 0 \\ T_{--} &= (\partial_- X)^2 = 0 \\ T_{+-} &= T_{-+} = 0\end{aligned}$$

由于我们已经用了光锥坐标，所以上面式子中的 X 都应该理解为 $X_R(\sigma^-), X_L(\sigma^+)$：

$$\begin{aligned}(\partial_+ X)^2 &= \frac{\alpha'}{2}\sum_{m,p}\alpha_m\cdot\alpha_p e^{-i(m+p)\sigma-} \\ &= \frac{\alpha'}{2}\sum_{m,n}\alpha_m\cdot\alpha_{n-m}e^{-in\sigma-} \\ &= \alpha'\sum_n L_n e^{-in\sigma-} \\ &= 0\end{aligned}$$

其中 $L_n = \frac{1}{2}\sum_m \alpha_m\alpha_{n-m}$，同理有 $\tilde{L}_n$。因为后面的指数项是任意的，所以 $L_n = \tilde{L}_n = 0$，$n \in \mathcal{Z}$，它们是能动量张量为 0 的要求。

注意到：

$$
\begin{aligned}
L_0 &= \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{m\neq 0}\alpha_{-m}\alpha_m \\
&= \frac{\alpha'}{4}p^\mu p_\mu + \sum_{m>0}\alpha_m\alpha_{-m} \\
&= -\frac{\alpha'}{4}M^2 + \sum_{m>0}\alpha_m\alpha_{-m} = 0 \\
\Rightarrow M^2 &= \frac{4}{\alpha'}\sum_{m>0}\alpha_m\alpha_{-m} = \frac{4}{\alpha'}\sum_{m>0}\tilde{\alpha}_m\tilde{\alpha}_{-m}
\end{aligned}
$$

到这一步实际上我们终于看到了一些量子化的苗头：只要我们接下来能把 M^2 后面的 $\alpha_m\alpha_{-m}$ 写成类似于 $\hat{a}\hat{a}^\dagger$ 的形式，就可以用 M^2 作用到态上得到它的分立谱，从而完成量子化。注意到 M^2 的形式直接依赖于 $L_0 = 0$，所以我们也把这个式子叫做质壳条件。

7.1.3 Witt Algebra

在正式进入量子化之前，我们在做一个准备工作。

首先先求出 L_n 的 Poisson 括号：

$$
\begin{aligned}
\{L_m, L_n\} &= \frac{1}{4}\sum_{k,l}\{\alpha_{m-k}\cdot\alpha_k, \alpha_{n-l}\cdot\alpha_l\} \\
&= \frac{1}{4}[i(m-k)\delta_{m-k+n-l,0}\alpha_k\cdot\alpha_l \\
&+ i(m-k)\delta_{m-k+l,0}\alpha_k\cdot\alpha_{n-l} \\
&+ ik\delta_{k+n-l,0}\alpha_{m-k}\cdot\alpha_l \\
&+ ik\delta_{k+l,0}\alpha_{m-k}\cdot\alpha_{n-l}] \\
&= \frac{i}{2}\sum_k[(m-k)\alpha_k\cdot\alpha_{m-k+n} + k\alpha_{m-k}\cdot\alpha_{k+n}]
\end{aligned}
$$

对第二项做 $k' = k - n$，我们就得到了 Witt algebra：

$$
\{L_m, L_n\} = i(m-n)L_{m+n}
$$

7.2 Quantization

现在我们终于要正是进入对闭弦的量子化阶段。在这里我们用的是正则量子化，适用于相对论性量子力学，因为我们的弦是相对论弦。从数学上

讲，经典过渡到量子的第一步就是把 Poisson 括号变成 Dirac 括号，即把 "{}" 变成 [ ]，并去掉 "i"，把括号里面的量变成算符。但当我们把物理量算符化以后，就要非常注意作用顺序。

之前在经典情况里，我们先找到 L_n 的表达式以及对易子，然后给出 M^2，现在我们的做法一样。

7.2.1 Normal Ordering

我们专门取一个记号 "::" 来限制算符的作用顺序是一个所谓的 normal ordering,这个记号意味着我们人为地给里面的东西换一个顺序,让下标更小的放在前头，比方说 : $\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2+\hat{\alpha}_2\hat{\alpha}_1 := \hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2+\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2+\hat{\alpha}_2\hat{\alpha}_1+[\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2]$。所以实际上 normal ordering 之后的量跟以前的差一个对易子，因为对易子就是表示交换性的东西。于是:

$$\{\alpha_n^\mu,\alpha_m^\nu\} = im\eta^{\mu\nu}\delta_{m+n,0} \Rightarrow [\hat{\alpha}_n^\mu,\hat{\alpha}_m^\nu] = m\eta^{\mu\nu}\delta_{m+n,0}$$
$$L_n \Rightarrow \hat{L}_n = \frac{1}{2}\sum_m :\hat{\alpha}_{n-m}\cdot\hat{\alpha}_m:$$

Normal Odering 后的 $\hat{L}_n$ 有一个比较重要的性质:

$$\begin{aligned}
\hat{L}_n(initial) &= \frac{1}{2}\sum_p \alpha_p^{\cdot}\alpha_{n-p} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{\frac{n}{2}}\alpha_p\cdot\alpha_{n-p}+\sum_{\frac{n}{2}}^{\infty}\alpha_p\cdot\alpha_{n-p} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{\frac{n}{2}}\alpha_p\cdot\alpha_{n-p}+\sum_{\frac{n}{2}}^{\infty}\alpha_{n-p}\cdot\alpha_p-\sum_{\frac{n}{2}}^{\infty}\alpha_{n-p}\cdot\alpha_p+\sum_{\frac{n}{2}}^{\infty}\alpha_p\cdot\alpha_{n-p} \\
&= \frac{1}{2}\sum_p :\alpha_p\cdot\alpha_{n-p}: +\frac{1}{2}\sum_{\frac{n}{2}}^{\infty}[\alpha_p^\nu,\alpha_{n-p_\nu}] \\
&= \hat{L}_n+\frac{1}{2}\sum_{\frac{n}{2}}^{\infty}\eta_\nu^\nu p\delta_{n,0} \\
&= \hat{L}_n+\frac{D-2}{2}\sum_{\frac{n}{2}}^{\infty}p\delta_{n,0}
\end{aligned}$$

倒数第二步求了 $\eta^{\mu\nu}$ 的迹，由于有一个负的时间分量，所以最后是 D-2。

所以可以看出，对于 $n \neq 0$ 的情况，是否 Normal Odering 不影响，而对于 n=0，后面跟的那个项可以计算，就是 $\frac{D-2}{2}\sum_0^\infty p = -\frac{D-2}{24}$，我们把这一项简记为”-a”。这一项是纯粹的量子效应。

7.2.2 全体正整数之和是 $-\frac{1}{12}$ ？

上面的那个求和怎么看怎么诡异，仿佛是说我每天赚一块，最后到死还亏了将近一毛?

其实这个问题有很多看法，有一种说法是重整化：

$\sum n = \sum_{\epsilon\to 0} ne^{-\epsilon n} = -\frac{\partial}{\partial\epsilon}\sum e^{-\epsilon n} = -\frac{\partial}{\partial\epsilon}(1-e^{-\epsilon})^{-1} = \frac{e^{-\epsilon}}{(1-e^{\epsilon})^2} = \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{1}{12} + \mathcal{O}(\epsilon)$，丢掉无穷大项就得到了这个神奇的结果。

不过最严谨的说法应该是解析延拓，即全体自然数求和是函数 $\zeta(-1)$ 的解，这个有趣的结果最早是欧拉给出来的，后来黎曼用 ζ 函数把它严格化了。

在原本的工具或者描述无定义的地方延拓一下，然后给出新的解，物理上 Kruskal 坐标对史瓦西坐标的延拓也是一个例子。不过延拓的东西以后到底是啥意义，这个就很微妙了。有一种看法是，“求和” 其实并不像我们直观所觉得的那么简单，加法的几条基本规则——交换律、结合律等等——如果去掉一两条可能就会得到完全不同的求和，尤其是在涉及到无穷的时候，所以延拓在某些时候其实就是更换了一种更广义的（限制更松的）加法。

BTW，Casimir 效应就跟这个求和紧密相关。

7.2.3 Central Charge

我们接着计算对易子：

$$
\begin{aligned}
[\hat{\alpha}^\mu_m, \hat{L}_n] &= \frac{1}{2}\sum_p [\hat{\alpha}^\mu_m, :\hat{\alpha}_p\cdot\hat{\alpha}_{n-p}:] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{\frac{n}{2}}[\hat{\alpha}^\mu_m, \hat{\alpha}_p\cdot\hat{\alpha}_{n-p}] + \sum_{\frac{n}{2}}^{\infty}[\hat{\alpha}^\mu_m, \hat{\alpha}_{n-p}\cdot\hat{\alpha}_p] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{\frac{n}{2}} m\hat{\alpha}_p\delta_{m+n-p,0} + m\hat{\alpha}_{n-p}\delta_{m+p,0} + \sum_{\frac{n}{2}}^{\infty} m\hat{\alpha}_{n-p}\delta_{m+p,0} + m\hat{\alpha}_p\delta_{m+p,0} \\
& n-p \Rightarrow p' \\
&= m\hat{\alpha}^\mu_{m+n}
\end{aligned}
$$

从而：

$$
\begin{aligned}
[\hat{L}_m, \hat{L}_n] &= \frac{1}{2}\sum_p [:\hat{\alpha}_p \cdot \hat{\alpha}_{m-p}:, \hat{L}_n] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\frac{m}{2}} [\hat{\alpha}_p \cdot \hat{\alpha}_{m-p}, \hat{L}_n] + \sum_{\frac{m}{2}}^{\infty} [\hat{\alpha}_{m-p} \cdot \hat{\alpha}_p, \hat{L}_n] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\frac{m}{2}} p\hat{\alpha}_{n+p} \cdot \hat{\alpha}_{m-p} + (m-p)\hat{\alpha}_p \cdot \hat{\alpha}_{m+n-p} \\
&+ \sum_{\frac{m}{2}}^{\infty} (m-p)\hat{\alpha}_{m+n-p} \cdot \hat{\alpha}_p + p\hat{\alpha}_{m-p} \cdot \hat{\alpha}_{n+p} \\
m - p &\Rightarrow p' \\
&= \frac{1}{2}\sum_p p\hat{\alpha}_{n+p} \cdot \hat{\alpha}_{m-p} + (m-p)\hat{\alpha}_p \cdot \hat{\alpha}_{m+n-p} \\
n + p &\Rightarrow p'' \\
&= (m-n)\hat{L}_{m+n}
\end{aligned}
$$

这是对于 $m + n \neq 0$ 的情况。因为如果 $m + n = 0$ 的话，结果将得到 $\hat{L}_0$，而这个东西按我们之前的计算，跟其他 $\hat{L}_m$ 不太一样。所以我们现在来专门

看看 $m+n=0$ 的情况：

$$
\begin{aligned}
[\hat{L}_m, \hat{L}_{-m}] &= \frac{1}{2}\sum_p [:\hat{\alpha}_p \cdot \hat{\alpha}_{m-p}:, \hat{L}_{-m}] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\frac{m}{2}} [\hat{\alpha}_p \cdot \hat{\alpha}_{m-p}, \hat{L}_{-m}] + \sum_{\frac{m}{2}}^{\infty} [\hat{\alpha}_{m-p} \cdot \hat{\alpha}_p, \hat{L}_{-m}] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\frac{m}{2}} p\hat{\alpha}_{p-m} \cdot \hat{\alpha}_{m-p} + (m-p)\hat{\alpha}_p \cdot \hat{\alpha}_{-p} \\
&+ \sum_{\frac{m}{2}}^{\infty} (m-p)\hat{\alpha}_{-p} \cdot \hat{\alpha}_p + p\hat{\alpha}_{m-p} \cdot \hat{\alpha}_{p-m} \\
m-p &\Rightarrow k \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=\frac{m}{2}}^{\infty} (m-k)\hat{\alpha}_{-k} \cdot \hat{\alpha}_k + \sum_{-\infty}^{\frac{m}{2}} (m-k)\hat{\alpha}_{-k} \cdot \hat{\alpha}_k + \sum_{-\infty}^{\frac{m}{2}} (m-k)[\hat{\alpha}_k, \hat{\alpha}_{-k}] \\
&+ \sum_{-\infty}^{\frac{m}{2}} k\hat{\alpha}_{k-m} \cdot \hat{\alpha}_{m-k} + \sum_{\frac{m}{2}}^{\infty} k\hat{\alpha}_{k-m} \cdot \hat{\alpha}_{m-k} + \sum_{\frac{m}{2}}^{\infty} k[\hat{\alpha}_{m-k}, \hat{\alpha}_{k-m}] \\
&= \frac{1}{2}\sum_k (m-k)\hat{\alpha}_{-k} \cdot \hat{\alpha}_k + \sum_k k\hat{\alpha}_{k-m} \cdot \hat{\alpha}_{m-k} \\
&+ D\sum_{-\infty}^{\frac{m}{2}} (m-k)k + D\sum_{\frac{m}{2}}^{\infty} k(m-k) \\
&= 2m\hat{L}_0 + D\sum_{k=-\infty}^{\infty} k(m-k) \\
&= 2m\hat{L}_0 + \frac{D}{12}m(m^2-1)
\end{aligned}
$$

后面多了一个尾巴，这个东西大有用处。其实我们也可以把上面两种情况的结果统一写成：

$$
[\hat{L}_m, \hat{L}_n] = (m-n)\hat{L}_{m+n} + \frac{D}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}
$$

第二项叫做中心扩张，这种完全版本的 Virasoro algebra 也相应地叫做 centrally extended Virasoro algebra，所以第二项里的那个 D 既是时空维数，又可以被称作 central charge。它们的具体意义将在 CFT 里得到阐释，这里我们只当它们是工具就行。

7.2.4 To Be Or Not To Be

之前我们的正则量子化是把各种东西变成了算符，然而在 QFT 语境里，最重要的生成算符和湮灭算符还没有出现，按照 QFT 的要求，它们的对易子应该是：$[\hat{a}^\mu_m, \hat{a}^{\dagger\,\nu}_n] = \eta^{\mu\nu}\delta_{m,n}$，而对比 $[\hat{\alpha}^\mu_n, \hat{\alpha}^\nu_m] = m\eta^{\mu\nu}\delta_{m+n,0}$，可以看出这两个东西可以直接从 $\hat{\alpha}_n$ 构造出来：

定义生成算符 $\hat{a}_n = \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}}$，湮灭算符 $\hat{a}^\dagger_n = \frac{\alpha_{-n}}{\sqrt{n}}$，这里省略了上标，它代表所激发的态在时空的某个方向上极化，下标 n 与所激发到的态的频率有关，很容易算得它们的对易子满足要求，而相应的 $\hat{L}_0$ 等等自然也要变成 $\hat{a}^\dagger_n \cdot \hat{a}_n$ 的形式。

7.2.5 M^2

现在所有的准备工作都做好了，我们将要量子化的弦的质量方谱，并证明，自洽的量子玻色弦理论必须居于 26 维。

由于算符化以及 normal ordering 以后，$\hat{L}_0$ 与原来相比有所不同，若仍然要从中得到 M^2，则 M^2 的定义也将有所改变，这是新的质壳条件:

$$
\begin{aligned}
\hat{L}_0(initial) &= \hat{L}_0 - a = 0 \\
&= \frac{1}{2}\hat{\alpha}_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k<0}\hat{\alpha}_k \cdot \hat{\alpha}_{-k} + \frac{1}{2}\sum_{k>0}\hat{\alpha}_{-k} \cdot \hat{\alpha}_k - a \\
&= -\frac{\alpha'}{4}M^2 + \sum_{k>0} k\hat{a}^\dagger_k \cdot \hat{a}_k - a \\
&\Rightarrow M^2 = \frac{4}{\alpha'}(\hat{N} - a)
\end{aligned}
$$

其中我们定义了 number operator：$\hat{N} = \sum_{k>0} k\hat{a}^\dagger_k \cdot \hat{a}_k$，我们来看看这个东西为什么可以叫做 number operator；

$$
\begin{aligned}
[\hat{N}, \hat{a}^\dagger_n] &= [\sum_k k\hat{a}^\dagger_k \cdot \hat{a}_k, \hat{a}^\dagger_n] \\
&= \sum_k k(\hat{a}^\dagger_k[\hat{a}_k, \hat{a}^\dagger_n] + [\hat{a}^\dagger_k, \hat{a}^\dagger_n]\hat{a}_k) \\
&= n\hat{a}^\dagger_n
\end{aligned}
$$

同理可得 $[\hat{N}, \hat{a}_n] = -n\hat{a}_n$。它的长相跟作用都和量子谐振子中的那个 number operator 一模一样，即某种意义上的被激发了多少次。

7.2.6 谱

粒子实际上没有基态，因为没有绝对静止的粒子。不过从更现代一点的 QFT 观点来看，粒子是场的激发，则场的基态可以认为是没有粒子。根据之前的运动方程可以发现弦的基态就是没有振动，至于弦本身的存在性需要在弦场论中去考察。

我们记弦的基态为 $|0\rangle$,则任意一个物理态可表示为 $|\phi\rangle = (\hat{a}_1^\dagger)^{n_1}(\hat{a}_2^\dagger)^{n_2}(\hat{a}_3^\dagger)^{n_3}...|0\rangle$，我们以 $\hat{\alpha}_1^\dagger \cdot \hat{\alpha}_1$ 为例说明 $\hat{N}$ 作用在 $|\phi\rangle$ 上的结果：

$$\begin{aligned}
\hat{N}|\phi\rangle &= \hat{a}_1^\dagger \cdot \hat{a}_1(\hat{a}_1^\dagger)^{n_1}(\hat{a}_2^\dagger)^{n_2}(\hat{a}_3^\dagger)^{n_3}...|0\rangle \\
&= \hat{a}_1^\dagger[1 + \hat{a}_1^\dagger \cdot \hat{a}_1]\hat{a}_1^{\dagger\, n_1-1}(\hat{a}_2^\dagger)^{n_2}(\hat{a}_3^\dagger)^{n_3}...|0\rangle \\
&= |\phi\rangle + (\hat{a}_1^\dagger)^2[\hat{a}_1 \cdot \hat{a}_1^\dagger](\hat{a}_1^\dagger)^{n-2}(\hat{a}_2^\dagger)^{n_2}...|\phi\rangle \\
&= n_1|\phi\rangle
\end{aligned}$$

所以 M^2 作用在上面的结果一般地为：$M^2|\phi\rangle = \frac{4}{\alpha'}(\sum_{i=1}^{\infty} in_i - a)|\phi\rangle = \frac{4}{\alpha'}(N-a)|\phi\rangle$，N 显然只能是分立的整数，所以我们的谱也是分立的一个个本征值，到这一步，量子化看来已经大功告成了，然而，仔细考察我们的结果，就会发现两个古怪的推论，一个来自于 $\hat{a}_n^\dagger$，一个来自于 $\hat{L}_m$。

7.2.7 Tachyon and Ghost

我们将 M^2 作用在基态上，来看看它的本征值（也就是它的质量方）是什么：$M^2|0\rangle = \frac{4}{\alpha'}(N-a)|0\rangle = -a\frac{4}{\alpha'}|0\rangle$，它的本征值是负的，也就是质量是个虚数。这会引起什么结果？首先，根据 on-shell 关系：$-E^2 + P^2 = -M^2$，此时有 $P > E$，此时计算 $P^\mu P_\mu = -E^2 + P^2 > 0$，即这是一个类空态，超光速。当然，这并不违背相对论，首先这个态未必是一个粒子态，其次相对论原则上其实是在禁止类空、类光、类时状态之间的转变。

并且，如果质量是虚数，则时间演化算子将从相位变化变成衰变，所以这个基态会迅速衰变，是一个不稳定的基态，我们称之为“Tachyon”。它由引入超对称解决，而这是超弦的内容，我们暂时只关注另一个问题。

接下来，我们用生成算符 $\hat{a}_n^0$ 作用在基态 $|0\rangle$ 上得到新的态，并对这个新的态做内积，得到它的模：$(\hat{a}_n^0|0\rangle)^\dagger\hat{a}_n|0\rangle = \langle 0|\hat{a}_n^0{}^\dagger\hat{a}_n^0|0\rangle = \langle 0|[\hat{a}_n^0{}^\dagger, \hat{a}_n^0]|0\rangle = -\langle 0|0\rangle$，最后一步用到了 $[\hat{a}_n^0, \hat{a}_n^0{}^\dagger] = -1$，于是 $|\hat{a}_n^0|0\rangle$ 和 $|0\rangle$ 的模肯定得有一个负的，但我们知道，模长为负的态是非物理的，我们称之为“ghost state”。

但到目前为止，以上两个奇异的结论又是理论的必然推论，所以我们要想办法做出一些修正，以去除掉这个 ghost，

7.2.8 谬矣，谬矣

实际上，当我们把 $\hat{L}_n$ 算符化并引入了中心荷以后，原本基于 Virasoro constrain 得到的 $L_n \equiv 0$ 这个时候就微妙了，如果我们保持这个约束，即认为对 $\forall n \in \mathcal{Z}$ 和物理态 $|\phi\rangle$，都有 $(\hat{L}_n - a\delta_{n,0})|\phi\rangle \equiv 0$，那会得到一个显然荒谬的结果：$\langle\phi|[\hat{L}_m, \hat{L}_{-m}]|\phi'\rangle = 0 = 2m\langle\phi|\hat{L}_0|\phi'\rangle + \frac{D}{12}(m^3 - m)\langle\phi|\phi'\rangle \neq 0$。

所以这个约束需要修改，我们稍微放松一点这个要求，令当 $m \geq 0$ 时，有 $\hat{L}_m - a\delta_{m,0}|\phi\rangle = 0$，并定义满足这个条件的态为真实物理态。同时，根据 Reality 条件：$\hat{L}_m^\dagger = \hat{L}_{-m}$，可知当 $m > 0$ 时，$\langle\phi'|\hat{L}_m|\phi\rangle^\dagger = \langle\phi|\hat{L}_{-m}|\phi'\rangle = 0$ 仍成立，也就是尽管我们不强行要求 $m < 0$ 的 L_n 也消掉 $|\phi\rangle$，但但仍然保持了算符的平均值为 0。

我们现在来定义一种伪态：$|\psi\rangle = \hat{L}_{-m}|\kappa\rangle$（$m > 0, |\kappa\rangle$ 的意义之后会看到），令它满足质壳条件：$L_0 - a|\psi\rangle = 0$，且易证与任意物理态 $|\phi\rangle$ 正交：$\langle\phi|\psi\rangle = 0$。现假设有两个物理态满足 $|\phi'\rangle = L_{-n}|\phi\rangle, n > 0$，则有：$\langle\phi'|\psi\rangle = \langle\phi|L_n|\psi\rangle = 0$，于是得到 $\forall n > 0, \hat{L}_n|\psi\rangle = 0$。

这个伪态有什么真实意义吗？没有，不然为什么称之为 spurious，但它是一种有用的态。现在我们来说明 $|\kappa\rangle$ 的意义，先取一个最一般的伪态：$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{L}_{-n}|\kappa_n\rangle$，由于 $(\hat{L}_0 - a)|\psi\rangle = 0$，则：

$$
\begin{aligned}
\hat{L}_0 \sum_{n=1}^{\infty} \hat{L}_{-n}|\kappa_n\rangle &= a \sum_{n=1}^{\infty} \hat{L}_{-n}|\kappa_n\rangle \\
L.H.S. &= \sum_{n=1}^{\infty}([\hat{L}_0, \hat{L}_{-n}] + \hat{L}_{-n}\hat{L}_0)|\kappa_n\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(n\hat{L}_{-n} + \hat{L}_{-n}\hat{L}_0)|\kappa_n\rangle
\end{aligned}
$$

由于求和的任意性，我们得出 $(\hat{L}_0 - a + n)|\kappa_n\rangle = 0$，所以看到 $|\kappa_n\rangle$ 其实就是以此式为质壳条件的态。

接下来我们就用这个东西得到时空维数是 26 的著名结论。

按照伪态的定义：

$$
\begin{aligned}
\hat{L}_1\hat{L}_{-1}|\kappa_1\rangle &= 0 \\
&= ([\hat{L}_1, \hat{L}_{-1}] + \hat{L}_{-1}\hat{L}_1|\kappa_1\rangle) \\
&= 2\hat{L}_0|\kappa_1\rangle
\end{aligned}
$$

同时，我们也知道，$(\hat{L}_0 - a + 1)|\kappa_1\rangle = 0$，所以 a=1，即 $\frac{D-2}{24} = 1$，所以 D=26!

为了证明这个结论的自洽性和一般性，我们再构造一个态 $|\psi\rangle = (\hat{L}_{-2} + \gamma\hat{L}_{-1}^2)|\kappa_2\rangle$，则：

$$
\begin{aligned}
\hat{L}_1|\psi\rangle &= 0 \\
&= \hat{L}_1(\hat{L}_{-2} + \gamma\hat{L}_{-1}^2)|\kappa\rangle \\
&= [\hat{L}_1, \hat{L}_{-2} + \gamma\hat{L}_{-1}^2]|\kappa_2\rangle + (\hat{L}_{-2} + \gamma\hat{L}_{-1}^2)\hat{L}_1|\kappa_2\rangle \\
&= [\hat{L}_1, \hat{L}_{-2} + \gamma\hat{L}_{-1}^2]|\kappa_2\rangle \\
&= (3\hat{L}_{-1} + 2\gamma\hat{L}_0\hat{L}_{-1} + 2\gamma\hat{L}_{-1}\hat{L}_0)|\kappa_2\rangle \\
&= (3\hat{L}_{-1} + 2\gamma[\hat{L}_0, \hat{L}_{-1}] + 2\gamma\hat{L}_{-1}\hat{L}_0 + 2\gamma\hat{L}_{-1}\hat{L}_0)|\kappa_2\rangle \\
&= (3\hat{L}_{-1} + 4\gamma\hat{L}_{-1}\hat{L}_0 + 2\gamma\hat{L}_{-1})|\kappa_2\rangle \\
&= \hat{L}_{-1}[3 + 2\gamma + 4\gamma(a-2)]|\kappa_2\rangle \\
&= \hat{L}_{-1}(3 - 6\gamma + 4\gamma a)|\kappa_2\rangle
\end{aligned}
$$

现在有了第一个方程，然后我们再做：

$$
\begin{aligned}
\hat{L}_2|\psi\rangle &= 0 \\
&= \hat{L}_2(\hat{L}_{-2} + \gamma\hat{L}_{-1}^2)|\kappa_2\rangle \\
&= [\hat{L}_2, \hat{L}_{-2} + \gamma\hat{L}_{-1}^2]|\kappa_2\rangle + (\hat{L}_{-2} + \gamma\hat{L}_{-1}^2)\hat{L}_2|\kappa_2\rangle \\
&= (4\hat{L}_0 + \frac{D}{2} + 6\gamma\hat{L}_{-1}\hat{L}_1 + 3\gamma[\hat{L}_1, \hat{L}_{-1}])|\kappa_2\rangle \\
&= [(4 + 6\gamma)(a-2) + \frac{D}{2}]|\kappa_2\rangle
\end{aligned}
$$

联立上述两个方程，并代入 $a = 1$，解得 $D = 26$。

类似的证明可以推广到其他态上，当然，新构建的态总要满足每一项前的 L_n 下标之和相同，如第二次构建的态满足：$-2 = -1 - 1$。要解释它需要用到 Viraosoro 表示，这里只能提到它们具有相同的本征值。

于是我们看到，26 维时空确实是量子化玻色弦自洽存在的必然维数。

7.2.9 驱鬼

按照我们说的，是为了消除 ghost 态才要求时空维数是 26，那现在怎么证明 ghost 态已经消除了呢?

我们取一个物理态 $|\phi\rangle = [A\hat{\alpha}_{-1}\cdot\hat{\alpha}_{-1} + B\hat{\alpha}_0\cdot\hat{\alpha}_{-2} + C(\hat{\alpha}_0\cdot\hat{\alpha}_{-1})^2]|0\rangle$，由于上面已经算出了 a=1，那么自然 $\hat{L}_0 - 1|\phi\rangle = \frac{1}{2}\hat{\alpha}_0^2 + \sum$

到此，协变量子化终于结束，我们成功量子化了闭弦的对易子，并给出了它的谱，通过要求时空为 26 维消除了不稳定的 ghost 态，闭弦部分称为一个和谐的量子理论。对于开弦，大部分方法都是一样的，就不再赘述了。

8 CFT

8.1 欢迎来到复域

弦的位形 X^μ 是两个实变量 τ 和 σ 的函数，为了得到左右行波我们引入光锥坐标 $\sigma^+=\tau+\sigma$ 和 $\sigma^-=\tau-\sigma$，如果把它们对应到复坐标 $z=x+iy$ 和 $\bar{z}=x-iy$，而复分析中最深刻美妙的就是共形变换，它保持任意两个复数 z 和 w 之间的角度的，根据之前的对应，这也就意味着保持光锥夹角，进而保持因果。

这种物理上的深刻和几何上的优美使得我们去研究共形场论——基于共形几何的量子场论。

8.1.1 Stipulations

先来规定映射法则和一些记号：我们把弦的所有指标为 0 的量都重记为“$-i$”倍的指标为 2 的量，而指标为 1 的量不动，如 $\tau=-i\sigma^2,\sigma=\sigma^1$，以及守恒流 $J^0=-iJ^2,J^1=J^1$。

度规的变换如下：$g'_{11}=g_{11}=1$，而此时，$g_{\mu\nu}(\partial_\tau)^\mu(\partial_\tau)^\nu=-1=g_{\mu\nu}(i\partial_2)^\mu(i\partial_2)^\nu=-g'_{\mu\nu}(\partial_2)^\mu(\partial_2)^\nu=-g'_{22}$,所以 $g'_{22}=1$,即我们把 Minkovsky 度规变成了 Euclidean 度规，此方法叫 Wick 转动，即配以 Minkovsky 度规的实时空等价于配以 Euclidean 度规的复时空。

更进一步，我们引入复变量，定义 $z=\sigma^1+i\sigma^2=\sigma-\tau=-\sigma^-$，$\bar{z}=\sigma^1-i\sigma^2=\tau+\sigma=\sigma^+$，这就是光锥坐标经过 Wick 转动后的坐标，逆变换是显然的，比如 $\tau=\frac{1}{2}(\bar{z}-z)=-i\sigma^2$。

之前得到的度规 g' 作用的指标是 1 和 2，现在我们希望得到作用在 z 和 $\bar{z}$ 上的度规：把 z 记为 σ^z，$\bar{z}$ 记为 $\sigma^{\bar{z}}$，于是可根据求和约定计算新度规：$g_{zz}=\frac{\partial\sigma^\mu}{\partial\sigma^z}\frac{\partial\sigma^\nu}{\partial\sigma^z}g_{\mu\nu}=(\frac{\partial\sigma^1}{\partial\sigma^z})^2+(\frac{\partial\sigma^2}{\partial\sigma^z})^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$，其余分量同理可得，最后度规为：g=$\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$。其余张量也可以求得，如 $V_z=\frac{\partial\sigma^1}{\partial\sigma^z}V_1+\frac{\partial\sigma^2}{\partial\sigma^z}V_2=\frac{1}{2}(V_1-iV_2)$。

复平面上的面元是 $dA=dz\wedge d\bar{z}=d(\sigma^1+i\sigma^2)\wedge d(\sigma^1-i\sigma^2)=2id\sigma^2\wedge d\sigma^1=-2d\tau\wedge d\sigma$。

8.2 微分几何视角

我们对共形几何的讲解不采用物理人常用的微分几何角度，因为我觉得群的角度更加美妙，但出于直观考虑，还是先从微分几何的角度概览一下它。

共形变换之意，即是对流形的保角变换，比方说在球面上正交的经线和纬线，经球极投影后还是正交的，而不论是角度还是长度，都是依赖于度规的，在一个度规下正交的向量在另一个度规下就不一定了，所以共性变换的结果肯定是要体现在度规上。

度规首先是一个 2 阶对称张量，所以其变换大致可以分为以下几类：

1：通过坐标变换，即 $R^\mu_\nu X^\nu = X'^\mu$，使得 $(R^{-1})^\rho_\mu (R^{-1})^\lambda_\nu g_{\rho\lambda} = g'_{\mu\nu}$，这也称为微分同胚，它不改变夹角也不改变距离，相当于只是换了一个坐标系而已；

2：不变换坐标，直接在度规前面加一个因子：$g'_{\mu\nu} = \Omega(X) g_{\mu\nu}$，它叫做 Weyl Rescaling，我们在 Polyakov action 那里就见过它了，它改变两点之间的距离但不改变夹角。之前提到的球极投影是另一个例子，而从这个例子可以看出，它可以改变曲率，即从物理上真正地改变几何；

3：既是微分同胚又是 Weyl 变换，即 $(R^{-1})^\rho_\mu (R^{-1})^\lambda_\nu g_{\rho\lambda} = \Omega(X) g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}$。一般情况下，坐标变换引起的度规变化并不能等价于给它前面挂一个 $\Omega(X)$，这种微分同胚是特殊的，在某种意义上来说，它表示微分同胚的影响可以部分地被 Weyl 变换消除，反过来说，这种 Weyl 变换也是特殊的，因为它既然等价于微分同胚，就不能改变流形的诸如曲率在内的物理性质。

我们的共形场论主要研究第三种情况。

8.3 共形几何

Klein 所提出的 Erlangen 纲领言到，任何一种几何都是研究在某个群下不变量的学问，拓扑是拓扑同胚群下的几何，黎曼几何是等距变换群下的几何，而共形几何则是共形保角变换群下的几何。

8.3.1 Global Transformation

回顾一下在微分几何视角里所说的第三种情况，我们发现，保度规的子群（其实就是 Poincare 群）可以看成恒等变换，而任意次微分同胚相继作用的结果仍然是给度规挂一个 $\Omega(X)$ 因子，由于微分同胚是光滑映射，自然

也存在逆映射，所以它们确实构成了群，叫做 global conformal group。

我们现在感兴趣的是二维情况，所以来仔细考察 2d global conformal group。

从主动观点而言，群变换的作用对象是整个流形，而现在的流形是全复平面 $C^* = C \cup \{\infty\}$（同构于黎曼球 S^2），这涉及到了无穷点的映射，由 Liouville 定理，一个在全复平面全纯且有界的映射必为常数映射，为了避免这种平庸的情况，我们要么把无穷映射到无穷，要么把某个内点映射到无穷，前者在 C 上是全纯的，但后者势必引入极点，故一般来说，映射都不再是全纯函数，但仍然存在亚纯函数，它允许极点的存在而仍然是保角映射，我们接下来讨论的共形变换都是亚纯函数（但为了称呼上的方便，之后不区分亚纯和全纯，根据变换本身可具体判断究竟是哪一个）。

另一方面，从物理上而言，我们希望微分同胚前后的时空仍然是“一个”时空，若引入多叶黎曼面，支点的存在会使得其附近的行为依赖于路径，所以我们限制所允许的映射为单叶映射。

同时满足以上两点的，定义在 C^* 上的亚纯共形变换群只有一个——Mobius 群。

8.3.2 Mobius Group

Mobius 群的群作用具有统一的形式：$\frac{az+b}{cz+d}$，其中 $a, b, c, d \in C$，$z \in C^*$，且 $ad - bc = 1$。

对这个形式做一点解释：首先根据之前的理由，不能允许有支点，所以不能出现根号或者对数函数等，又由 Piacrd 大定理，全纯函数在本性奇点的邻域内无穷多次地取到每个有限复值，这也不是我们想要的，由于映射涉及到无穷，所以我们允许它有极点，于是最一般的形式就是 $\frac{P(z)}{Q(z)}$，其中 P 和 Q 都是多项式。如果 P 是高次多项式，则根据代数学基本定理，它具有多个零点，映射不再是一对一的，对 Q 同理，所以 P 和 Q 都只能是一次多项式，故有 $\frac{az+b}{cz+d}$。注意到，这个变换有以下映射：

$$z = 0 \Rightarrow z' = \frac{b}{d}, z = \infty \Rightarrow z' = \frac{a}{c}$$
$$z = -\frac{b}{a} \Rightarrow z' = 0, z = -\frac{d}{c} \Rightarrow z' = \infty$$

要保证映射的唯一性，所以 $\frac{b}{d} \neq \frac{a}{c}$，即 $ad - bc \neq 0$，同时，由于是比例式，所以 a,b,c,d 的绝对大小没有意义，我们约定取 $ac - bd = 1$。

如果取 $a=\frac{1}{d}, b=c=0$，则群变换的结果为 a^2z，称之为 dilation；如果取 $a=d=1, c=0$，则结果为 $z+b$，相当于平移；如果取 $a=d=0$，则结果为 $\frac{d}{cz}$，相当于反演，前两者的共形性比较直观，反演的共形性需要从黎曼球的视角去看，把 C^* 看做黎曼球的球极投影，反演就是旋转黎曼球。

所以，Mobius 群的群变换包含以上三大类，可以验证这三类都是保角的，任何一个一般的共形变换都可以由它们组合得到，具有共形不变性的理论即是在以上几种变换下不变的理论。当然，从直观来讲，保角变换肯定还有旋转，但旋转作用其实就是 $U(1)$，给 Mobius 群前面乘一个 $e^{i\theta}$ 即可。

进一步看这个群，其实可以把群元一一对应写成 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，而行列式取 1，群元的乘积规则被同构为矩阵乘积。这些满足条件的矩阵组成的群被称为 $SL_2(C)$，但注意到作为比例式，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 等价于 -$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，所以这种矩阵表示不是我们通常见到的表示，它被称为 Mobius 群的投影表示，记做 $PSL_2(C)$。

8.3.3 Mobius Algebra

我们已经从李群的角度描述了 conformal group，不过从物理上我们常常要考虑无穷小变化，从而根据 Noether 定理寻找守恒流，这就来到了 conformal algebra。

为了寻找李代数，我们采用一些数学技巧，认为 Mobius 群是单参量 t 生成的群：$A_t=\begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$，于是有 $A_t(z)=\frac{a(t)z+b(t)}{c(t)z+d(t)}$，我们取 $A_{t=0}(z)=z$，即 $a(0)=d(0)=1$，$c(0)=b(0)=0$，则对 t 求导数为：

$$
\begin{aligned}
\frac{dA(z)}{dt}|_{t=0} &= \frac{(\dot{a}z+\dot{b})(cz+d)-(\dot{c}z+\dot{d})(az+b)}{(cz+d)^2}|_{t=0} \\
&= (\dot{a}z+\dot{b})-(\dot{c}z+\dot{d})(z) \\
&= -\dot{c}z^2+(\dot{a}-\dot{d})z+\dot{b}
\end{aligned}
$$

同时，上式应该等于群代数作用在 z 上，即 $\alpha^n L_n(z)$，所以对比得到 Mobius 群的三个独立生成元为：$z^2\partial_z$，$z\partial_z$，∂_z。

反过来说，如果只保留 z^2 项，即认为 $\dot{a}=\dot{d}$，$\dot{b}=0$，则根据初始条件可以解出此 $A_t(z)=\frac{az}{cz+d}=\frac{1}{\frac{1}{z}+\frac{c}{a}}$，即做反演 + 平移 + 反演；如果只保留

一阶项，即认为 $\dot{c} = \dot{b} = 0$，则 $A_t(z) = \frac{a}{d}z$，即 dilation；如果只保留常数项，则结果为平移。

我们讨论了关于 z 的部分，关于 $\bar{z}$ 的部分是完全一样的，但有一个不平凡的结果是：当我们把这两支相互共轭的代数组合到一起，会得到 Lorentz 群！

8.3.4 Lorentz Coming

采用通用的记号：$L_n = -z^{n+1}\partial_z$，则 $L_{-1} = -\partial_z$，$L_0 = -z\partial_z$，$L_1 = -z^2\partial_z$，$\bar{L}_{-1}$，$\bar{L}_0$，$\bar{L}_1$ 同理。

将上述生成元进行组合：

$$
\begin{aligned}
i(L_{-1} + \bar{L}_{-1}) &= -i(\partial_z + \partial_{\bar{z}}) \\
&= \frac{-i}{2}(\partial_x - i\partial_y + \partial_x + i\partial_y) \\
&= -i\partial_x = P_x
\end{aligned}
$$

同理有 $-(L_{-1} - \bar{L}_{-1}) = P_y$，于是我们有了二维平面的两个平移生成元。

$$
\begin{aligned}
L_0 - \bar{L}_0 &= -\frac{x+iy}{2}(\partial_x - i\partial_y) + \frac{x-iy}{2}(\partial_x + i\partial_y) \\
&= i(x\partial_y - y\partial_x) = M_{xy}
\end{aligned}
$$

恰好就是二维平面上的旋转。

$$
\begin{aligned}
i(L_0 + \bar{L}_0) &= -i[\frac{x+iy}{2}(\partial_x - i\partial_y) + \frac{x-iy}{2}(\partial_x + i\partial_y)] \\
&= x\partial_x + y\partial_y = D
\end{aligned}
$$

是二维平面的 dilation。

$$
\begin{aligned}
i(L_1 + \bar{L}_1) = -i[\frac{x^2+2ixy-y^2}{2}&(\partial_x - i\partial_y) + \frac{x^2-2ixy-y^2}{2}(\partial_x + i\partial_y)] = \\
= -i[(x^2-y^2)\partial_x &+ 2xy\partial_y] = K_1; \\
-(L_1 - \bar{L}_1) = i[2xy\partial_x - (x^2-y^2)\partial_y] &= K_2
\end{aligned}
$$

这两个形成了二维平面的一种叫做 special conformal transformation 的变换，其实就是反演 + 平移 + 反演。

以上几种之中，包含二维平面上的 Lorentz 变换是显然的，但我们还可以做得更好。

我们先来看看这些个生成元的对易子，容易验证为：

$$
\begin{aligned}
[L_0, L_{-1}] &= L_{-1} \\
[L_0, L_1] &= -L_1 \\
[L_1, L_{-1}] &= 2L_0
\end{aligned}
$$

如果我们重记 $iL_{-1} = L_+$，以及 $iL_1 = L_-$，则上式与 $SU(2)$ 的对易子相同，如果把 $\bar{L}_n$ 那一支也算进来，完整的 Mobius 群恰好同构于 $SU(2) \oplus SU(2)$，即 Lorentz 群！

更一般地将，从生成元的数量来说，n 维 Euclidean 共形场论里有 1 个 dilation，n 个 special conformal transformation，$\frac{n(n-1)}{2}$ 个 rotation，共有 $1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$，恰好是 $SO(1, n+1)$ 的生成元个数。可以证明，n 维欧式空间共形群与 $SO(n+1, 1)$ 同构，n 维闵氏空间上的共性群同构于 $SO(2, n)$。

8.4 Local Transformation

目前为止，我们讨论的都是在整个 C^* 上定义良好的变换，包括平移、伸缩、旋转和反演，它们也相应地被称为 global conformal transformation，但倘若我们只关注 C^* 上的某个开集，允许开集以外有极点，这也有一定的物理价值，但这种变换只有无穷小的代数版本，而没有有限大小的群作用版本，因为它们在 C^* 上显然是不可逆的（至少不是双全纯函数）。

我们一般地记此时的无穷小作用为：$z \to z + \epsilon(z)$，对 $\epsilon(z)$ 在 $z = 0$ 做 Laurent 展开为：$\epsilon(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\epsilon_n z^{n+1}$，其中 ϵ_n 是复常数，考虑到 $\delta z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\epsilon_n z^{n+1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\epsilon_n z^{n+1} \partial_z z$，所以生成元是 $L_n = -z^{n+1}\partial_z$，它有无穷多个！

进一步我们看到，对于 $n < -1$ 的生成元，$z = 0$ 是其的一个 $-n-1$ 阶极点，对于 $n > 1$ 的部分，$z = \infty$ 是其的 n+1 阶极点，它们有良好定义的部分是挖掉了顶点的黎曼球。而 L_{-1}，L_0，L_1 在 $z = 0$ 以及 $z = \infty$ 仍然定义良好，所以它们所对应的 Mobius 群才是 global。

8.4.1 Witt Algebra

根据已经得到的 L_n，我们可以求得它的代数的结构：

$$
\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} \\
[\bar{L}_m, \bar{L}_n] &= (m-n)\bar{L}_{m+n} \\
[\bar{L}_m, L_n] &= 0
\end{aligned}
$$

这东西就是 Witt Algebra，我们之前已经在弦论中见过了。

8.4.2 中心扩张

我们目前有的代数是 Witt algebra，在弦论中，我们知道它还有一个量子化后的版本，叫做 Virasoro algebra，这如何从 CFT 的角度解释呢?

回忆一下，其实我们在量子力学中也见过投影表示：量子态 $|\phi\rangle$ 差到一个相位在物理上是等价的，它们在 Hilbert 空间中是一条“线”而非一个“点”，作用在这种空间的群表示就是投影表示，满足 $U(g_1)U(g_2) = e^{i\theta(g_1,g_2)}U(g_3)$，所以投影表示空间不是通常意义上的线性空间。

不过，尽管 $|\phi\rangle$ 前面的相位本身是任意的，但投影表示相乘后出现的相位 $e^{i\theta(g_1,g_2)}$ 却应该是确定的，否则表示将不再是表示，只不过我们没法用原始的代数结构算出来。现在，我们将利用中心扩张，通过添加中心荷来确定这一项。

作用在 Hilbert 空间的群显然是一个李群，于是群元依赖于流形上的坐标：$g = g(x)$，假设有以下关系满足：

$$
\begin{aligned}
x_3^a &= x_1^a + x_2^a + \gamma^a_{bc}x_1^b x_2^c + ... \\
\theta(g_1, g_2) &= \theta(x_1, x_2) = \eta_{ab}x_1^a x_2^b \\
U(g(x_1)) &= 1 + i x_1^a T_a + \frac{1}{2}\sigma_{ab}x_1^a x_1^b + ...
\end{aligned}
$$

于是，把 $U(g(x_1))U(g(x_2)) = e^{i\theta(g_1,g_2)}U(g(x_3(x_1.x_2)))$ 展开到二阶项，对比含 $x_1^a x_2^b$ 的部分就会得到：

$$
-T_a T_b = i\eta_{ab} + i\gamma^c_{ab}T_c + \sigma_{ab}
$$

所以新的对易子是：

$$
[T_a, T_b] = i(\gamma^c_{ba} - \gamma^c_{ba})T_c + i(\eta_{ba} - \eta_{ab})
$$

后一项就是中心扩张，当这个项确定下来以后，就总是可以算出 $\theta(x_1,x_2)$。

以上是量子力学中某个群的中心扩张，我们将沿用这种思路，利用中心扩张从 Witt 代数得到 Viraosoro 代数。

8.4.3 Virasoro Algebra

受量子力学中的讨论启发，我们重新把 Witt Algebra 写作：

$$[L_m,L_n]=(m-n)L_{m+n}+cg(m,n)$$

其中 c 是一个常数，$g(m,n)$ 是待求的关键，由于对易子是反对称的，所以 $g(m,n)=-g(n,m)$，注意到，$[L_m,L_0]=mL_m+cg(m,0)$，我们总可以重新定义 L_m，把后面的 $g(m,0)$ 作为常数吸收到 L_n 中去，这不影响 L_n 作为生成元的作用，我们还定义 $g(-1,1)=0$，于是，根据 Jacobi identity：$[A,[B,C]]+[C,[A,B]]+[B,[C,A]]=0$，代入 L_n,L_m,L_0 得到：

$$\begin{aligned}
&[L_n,[L_m,L_0]]+[L_0,[L_n,L_m]+[L_m,[L_0,L_n]]\\
=&m[L_n,L_m]+(n-m)[L_0,L_{m+n}]-n[L_m,L_n]\\
=&[m(n-m)+(n-m)(-n-m)-n(m-n)]L_{m+n}+cmg(n,m)-cng(m,n)\\
=&c[mg(n,m)+ng(n,m)]
\end{aligned}$$

若要使得上式为 0，则要么 $m=-n$，要么 $m\neq-n$ 但此时 $g(n,m)=0$。

再代入 L_n,L_{-1},L_{-n+1}，并采用规范 $g(2,-2)=\frac{1}{2}$ 即可算出

$$g(n,-n)=\frac{1}{12}(n^3-n)$$

所以有：

$$[L_m,L_n]=(m-n)L_{m+n}+\frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}$$

此即 Virasoro Algebra。

我们看到，它的中心荷来自于消除投影表示的自由度，而之前在弦论中我们得到它，是因为引入了 Normal ordering，而 Normal ordering 恰恰也是旨在消除算符作用顺序的任意性，图像是一致的。

由于进入了量子力学，生成元就变成算符，所以接下来来研究 CFT 中的场。

8.5 Field

在实流形里，我们谈及变换的时候总是涉及指标，但在复流形里，由于全纯函数的特殊性（它只依赖于 $x+iy=z$ 这个特定组合），有时候不从张量而仅从普通函数的视角去看待它也是很方便的，所以之后的章节里，我们将灵活省略指标。

不采用指标记法时，其实就是把所有的张量都单纯地看做是 z 和 $\bar{z}$ 的函数，这时，作用在场上的共形变换需要借助一个叫做全纯维度的量 h，以及反全纯维度的 $\bar{h}$ 来定义（$\bar{h}$ 不代表 h 的共轭）：当 $z \to w(z)$ 时，$\Phi(z,\bar{z}) \to (\frac{\partial w}{\partial z})^h(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}})^{\bar{h}}\Phi(w,\bar{w})$。

对 global conformal transformation（即 Mobius 变换）满足此关系的场叫做 quasi-primary field，而对任意共形变换都成立的场是 primary field，显然 primary field 一定是 quasi-primary field，反之不一定，所以为了一般性起见，我们都讨论 primary field。

8.5.1 Variation of Field

之前已经说了，最一般的 CFT 代数是没有对应的群的，因为一般在 C^* 有定义不良的地方，所以我们主要研究场的无穷小变换。

以全纯部分为例，此时，$z \to z+\epsilon(z)=w$，

$$(\frac{\partial w}{\partial z})^h = (1+\partial_z\epsilon)^h \approx 1 + h\partial_z\epsilon$$
$$\Phi(z+\epsilon,\bar{z}) \approx \Phi(z,\bar{z}) + \epsilon\partial_z\Phi(z,\bar{z})$$

于是，忽略二阶以上小量，我们有：

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon\Phi &= (\frac{\partial w}{\partial z})^h(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}})^{\bar{h}}\Phi(w,\bar{w}) - \Phi(z,\bar{z})\\ &\approx (h\partial_z\epsilon + \bar{h}\partial_{\bar{z}}\bar{\epsilon} + \epsilon\partial_z + \bar{\epsilon}\partial_{\bar{z}})\Phi\end{aligned}$$

ϵ 我们是知道的，而 h 和 $\bar{h}$ 我们可以利用 dilation 很方便地求得：$z \to \lambda z, \Phi(z,\bar{z}) \to \lambda^h\bar{\lambda}^{\bar{h}}\Phi(\lambda z,\bar{\lambda}\bar{z})$，于是便可得到 $\delta\Phi$。

8.6 OPE

当两个算符任意接近的时候，由量子力学的基本原理我们知道此时事情会变得微妙起来，但接下来在 CFT 的框架下，我们能够用一系列新的定义在其中一点的场，来给出两个任意近的算符的作用。

8.6.1 能动量张量

作为铺垫，我们来研究能动量张量 $T_{\mu\nu}$。

先回忆一下，在之前的 Polyakov action 中，我们已经得到了能动量张量的变分表达式：$\delta S=-\frac{T}{2}\int d^2x\sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$，在 CFT 下，$\delta g^{\mu\nu}\propto g^{\mu\nu}$，则上式导出 $T^{\mu}_{\mu}=-T_{00}+T_{11}=0$，Wick 转动后，$T_{22}=\frac{\partial\sigma^\mu}{\partial\sigma^2}\frac{\partial\sigma^\nu}{\partial\sigma^2}T_{\mu\nu}=-T_{00}$。

现在回到复平面上：

$$
\begin{aligned}
T_{z\bar{z}}=T_{\bar{z}z}&=\frac{\partial\sigma^\mu}{\partial\sigma^z}\frac{\partial\sigma^\nu}{\partial\sigma^z}T_{\mu\nu}\\
&=\frac{\partial\sigma^1}{\partial\sigma^z}\frac{\partial\sigma^1}{\partial\sigma^z}T_{11}+2\frac{\partial\sigma^1}{\partial\sigma^z}\frac{\partial\sigma^2}{\partial\sigma^z}T_{12}+\frac{\partial\sigma^2}{\partial\sigma^z}\frac{\partial\sigma^2}{\partial\sigma^z}T_{22}=\frac{1}{4}(T_{22}+T_{11})=0\\
T_{zz}=...&=\frac{1}{2}(T_{11}-iT_{12})\\
T_{\bar{z}\bar{z}}=...&=\frac{1}{2}(T_{11}+iT_{12})
\end{aligned}
$$

原本在 Minkovsky 度规下得到的守恒律：$\partial^\mu T_{\mu\nu}=0$，换到复平面上只是差了一个微分同胚，所以关系仍然满足，即 $\partial^z T_{zz}+\partial^z T_{z\bar{z}}=\partial^z T_{zz}=\frac{1}{2}\partial_{\bar{z}}T_{zz}=0$，即 T_{zz} 是一个全纯函数，记为 $T(z)$，同理可得 $T_{\bar{z}\bar{z}}$ 是一个反全纯函数，记为 $T(\bar{z})$。

进一步来说，我们知道由无穷小变换 ϵ^ν 生成的守恒流是：$J_\mu=T_{\mu\nu}\epsilon^\nu$，以全纯部分为例，两边同时做微分同胚有：$J_z=T_{z\nu}\epsilon^\nu=T_{zz}\epsilon^z$，而原本的守恒律：$\partial^\mu J_\mu=0$，现在也满足：$\partial^z J_z+\partial^{\bar{z}}J_{\bar{z}}=\frac{1}{2}(\partial_{\bar{z}}J_z+\partial_z J_{\bar{z}})=0$。

我们记：$J_z=J(z)=T(z)\epsilon(z)$，反全纯部分同理。

守恒荷是：$Q=\int d\sigma^1 J_0=\int d\sigma^1(-iJ_2)=\int d\sigma^1(J_z-J_{\bar{z}})=\int d\sigma^1(J(z)-J(\bar{z}))$，被积函数的自变量分别是 z 和 $\bar{z}$，我们希望也能够把微分量写成关于 z 和 $\bar{z}$ 的形式，于是我们接下来再做一次变换。

8.6.2 Radialize

定义 $w=e^{i\bar{z}}=e^{\sigma^2}e^{i\sigma^1}$，以闭弦为例，其原本的世界面是一个圆柱，母线方向是 $\tau(-i\sigma^2)$，圆周方向是 σ，现在做了这个变换之后，母线时间方向变成了径向，圆周方向被映射到复平面上的圆，时间上的过去无穷远对应 w 平面原点，未来无穷远相应地是径向无穷远，像是这个圆柱被从内部向外挤压开铺平成复平面（值得一提的是，对于开弦，由于 $\sigma\in[0,\pi]$，w 的虚部总是正的，即只有上半平面）。

于是对 σ^1 积分就是绕着 $|w| = cons.$ 的圆旋转：$Q = \int d\sigma^1(J(z) - J(\bar{z})) = \oint_{|w|=c} dw(J(w) - J(\bar{w})) = \oint_{|w|=c} dwJ(w) + d\bar{w}J(\bar{w})$（注意 $\bar{w}$ 转向相反）。

在 Radialize 之后，改变的 σ^2 的时间平移其实就是径向移动，即 $-iH = D = i(L_0 + \bar{L}_0)$，改变 σ^1 的空间平移就是旋转，即 $-iP = M = (L_0 - \bar{L}_0)$。

8.6.3 Radial Ordering

接下来，我们不加证明地引入一个非常重要的公式：

$$\delta_\epsilon \Phi = [Q, \Phi]$$

这个式子里面的 Q 应该理解为算符，所以是量子力学式的公式，它让人想起来海森堡表象。

Q 我们已经得到了，而且只要 ϵ 满足 Virasoro 代数，它就是算符。注意到对易子的线性性，我们可以只处理 holomorphic 的部分，它为：

$$[Q(w), \Phi(z)] = \oint_{|w|=c} dwJ(w)\Phi(z,\bar{z}) - \oint_{|w|=c} dw\Phi(z,\bar{z})J(w)$$

由于是算符，所以我们要特别注意作用顺序，以前在弦论中我们引入了 Normal Ordering，现在我们要保证因果律，时间在前的算符要先作用，经过上一章的映射后，就变成了半径小的先作用，叫做 radial ordering。

我们对对易子进行这个 ordering，并引入适当的积分系数，得到：

$$[Q(w), \Phi(z)] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|>|z|} dwJ(w)\Phi(z,\bar{z}) - \frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|<|z|} dw\Phi(z,\bar{z})J(w)$$

边界曲线同伦变换不影响值，所以可以让两支边界连续变换形成一个净结果为绕点 z 的圈：

$$\begin{aligned}[Q(w), \Phi(z)] &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|w-z|=c} dw(J(w)\Phi(z) - \Phi(z,\bar{z})J(w)) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|w-z|=c} dwR(J(w)\Phi(z,\bar{z}))\end{aligned}$$

由于 $J(z) = T(z)\epsilon(z)$，所以：

$$\delta\Phi = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|w-z|=c} dw\epsilon(w)R(T(w)\Phi(z,\bar{z})) + antipart...$$

8.6.4 Primary Field

回忆之前，我们已经得到了：

$$\delta\Phi = (h\partial_z\epsilon + \bar{h}\partial_{\bar{z}}\bar{\epsilon} + \epsilon\partial_z + \bar{\epsilon}\partial_{\bar{z}})\Phi$$

对比两个 $\delta\Phi$ 的 z 部分有：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|w-z|=c} dw\epsilon(w)R(T(w)\Phi(z,\bar{z})) = (h\partial_z\epsilon + \epsilon\partial_z)\Phi$$

回忆一般的 Cauchy 积分公式，对一个在 U 内全纯在 ∂U 上连续的函数 $f(z)$ 有：$\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\partial U}\frac{f(\epsilon)}{(\epsilon-z)^{n+1}}d\epsilon = f^{(n)}(z)$，要得到 $h\partial_z\epsilon\Phi$，显然积分应为：$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|w-z|=c}\frac{h\Phi(z,\bar{z})\epsilon(w)}{(\epsilon-z)^2}dw$，要得到 $\epsilon\partial_z\Phi$，积分应为：$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|w-z|=c}\frac{\epsilon(w)\partial_z\Phi(z,\bar{z})}{\epsilon-z}dw$，所以：

$$R(T(w)\Phi(z,\bar{z})) = \frac{h\Phi(z)}{(\epsilon-z)^2} + \frac{\partial_z\Phi(z,\bar{z})}{\epsilon-z} + ...$$

“...” 代表全纯函数，它们在闭合回路上的积分为 0，不能由我们的方法算出来，类似于某种积分常数，但我们一般关注的也只是回路积分，所以它们没什么影响，相应可以算出 $\bar{z}$ 对应的部分。

在不引起歧义的情况下（在 CFT 语境下我们几乎可以认为“定义其为此”），我们简记上述部分为：

$$T(w)\Phi(z,\bar{z}) = \frac{h\Phi(z)}{(w-z)^2} + \frac{\partial_z\Phi(z,\bar{z})}{w-z}$$

再算上 $\bar{z}$ 的部分，此即 primary field $\Phi(z,\bar{z})$ 对能动量张量 T 的算符乘积展开（OPE）。

一般地讲，任何 primary field 对 T 都有如此形式的 OPE，它的物理意义是，当着两个算符作用在非常临近的时空点上时，其结果可以由一系列新的场在其中一点的行为之总和给出。

8.6.5 Quasi-Primary Field

一个很自然的问题是，quasi-primary field 的 OPE 是什么样子？是否会有不同？接下来我们就来研究一个很典型的 quasi-primary field：$T(z)$。

显然，我们要先算 T 对 T 的 OPE，这就需要显式地定义出 T。从群论的角度讲，某个无穷小变换：$z \to z - \epsilon_n z^{n+1} = z + \epsilon(z)$ 应该由 $-\epsilon_n L_n =$

$-\epsilon_n z^{n+1}\partial_z$ 诱导，而从场论的角度讲，无穷小变换由守恒荷 Q 诱导，所以有：$Q=-\epsilon_n L_n$，即

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\oint_c dz T(z)\epsilon(z)=-\epsilon_n L_n\\ \Rightarrow &\frac{1}{2\pi i}\oint_c dw T(z) z^{n+1}=L_n\end{aligned}$$

根据 Cauchy 积分公式，反解出

$$T(z)=\sum_{n\in\mathcal{Z}} z^{-n-2}L_n$$

假如这是一个 primary field，那我们可以像计算 Φ 一样通过计算 δT 得到 $R(T(w)T(z))$，但按本章的目的我们暂且相信它不是，而且我们考虑的也是一般的（非 global）变换 $-\epsilon_n L_n$，所以 $\delta T(z)$ 直接算不出，于是我们另辟蹊径：既然 $T(z)$ 中含有 Virasoro 生成元 L_n，那 Viraoso 代数的性质应该就会对它做出一定限制：

$$[L_n,L_m]=\oint_c\frac{dw}{2\pi i}\frac{dz}{2\pi i}T(w)w^{n+1}T(z)z^{m+1}-\oint_c\frac{dz}{2\pi i}\frac{dw}{2\pi i}T(z)z^{m+1}T(w)w^{n+1}$$

w 和 z 的积分曲线本身是任意的，但我们要保证因果性，进行 Radialize，得到：

$$\begin{aligned}[L_n,L_m]&=\oint_c\frac{dw}{2\pi i}\frac{dz}{2\pi i}R(T(w)T(z))w^{n+1}z^{m+1}\\ &=(n-m)L_{m+n}+\frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{m+n,0}\end{aligned}$$

我们一项项对比，先看最简单的 central charge 项，注意到 $n^3-n=(n+1)n(n-1)$，所以它对应的积分应该为：

$$\begin{aligned}&\frac{c}{2}\oint\frac{dz}{2\pi i}z^{m+1}\oint\frac{dw}{2\pi i}\frac{w^{n+1}}{(w-z)^4}\\ =&\frac{c}{2}\oint\frac{dz}{2\pi i}z^{m+1}\frac{1}{3!}\partial_z^3 z^{n+1}\\ =&\frac{c}{12}(n^3-n)\oint\frac{dz}{2\pi i}z^{m+n-1}\end{aligned}$$

由 Cauchy 积分公式可知，当且仅当 $m+n=0$ 时，上式不为零，即等于 $\frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{m+n,0}$。

再来看 $(n-m)L_{m+n}$，注意到它其实是：$(n-m)\oint\frac{d\sigma}{2\pi i}T(\sigma)\sigma^{m+n+1}$，所以取相应积分为：

$$\begin{aligned}
&\oint\frac{dz}{2\pi i}z^{m+1}\oint\frac{dw}{2\pi i}[2\frac{T(w)w^{n+1}}{(w-z)^2}+\frac{\partial_w T(w)w^{n+1}}{w-z}]\\
=&\oint\frac{dz}{2\pi i}z^{m+1}[2T(z)\partial_z z^{n+1}+\partial_z T(z)z^{n+1}\\
=&\oint\frac{dz}{2\pi i}z^{m+1}2(n+1)T(z)z^n+\oint\frac{dz}{2\pi i}z^{m+1}\partial_z T(z)z^{n+1}\\
=&\oint\frac{dz}{2\pi i}T(z)z^{m+n+1}[2(n+1)-(m+n+2)]\\
=&(n-m)\oint\frac{dz}{2\pi i}T(z)z^{m+n+1}
\end{aligned}$$

倒数第二个等号用到了对后面一项的分部积分，由于是回路积分，所以边界项笑掉了。最后，T 对 T 的 OPE 便是：

$$T(w)T(z)=\frac{c/2}{(w-z)^4}+\frac{2T(w)}{(w-z)^2}+\frac{\partial_w T(w)}{w-z}$$

比起 primary field 多了第一个与中心荷有关的项。

此时，回忆 Viraoso algebra，当 $n=-1,0,1$ 的时候是没有中心荷贡献的，此时共形变换是 global defined，而 T 对 T 的 OPE 也不再有反常的 4 次方项，所以，T 是 quasi-primary field，且 h=2。

8.7 Virasoro Representation

在量子力学语境下，我们的表示空间自然是 Hilbert 空间。回忆 $\mathfrak{so}(3)$，我们利用它的 Casimir 元 J^2 的本征值 j 标记不同的子空间（或者 multiplet）V^j，然后用 J_3 的本征值 m 标记每一个子空间里的 2j+1 个本征矢，记本征值最大的那个 highest weight 态为 $|j,m\rangle$，其他本征态由 J^- 作用于其上构建出。对于 Virasoro 代数，我们也这么做。

首先是找到一个 Casimir 元，一个与所有代数都对易的算符，这其实就是中心荷 C。在之前的章节中，中心荷看起来就像一个常数，但如果考虑到对易子的封闭性，C 就必须是一个算符，所以它实际上应该看成 $C=c\times I$，于是我们首先根据 C 的不同本征值把表示空间分成若干个子空间 V^c。

接下来是寻找一个合适的算符，用它的本征值标记子空间里的矢量。注意到：$[L_0,L_{\pm n}]=\mp nL_n$，这非常类似于 $[J_3,J_\pm]=\pm J_\pm$，所以我们选

择 L_0，记其本征值为 l，所以 Hilbert 空间里的本征态就是：$|l,c\rangle$，满足 $L_0|l,c\rangle = l|l,c\rangle$。

由对易关系可得，$L_0(L_n|l,c\rangle) = (L_nL_0 + [L_0, L_n])|l,c\rangle = (l-n)L_n|l,c\rangle$，所以 L_n 将态变为本征值更小的那个，本征值可以任意小下去吗？一般不能，粗糙地说，L_n 跟 $T(z)$ 有关，而后者与能量相关，能量通常有最小值，而没有最大值，比如谐振子有最小能量 $E = \frac{\hbar\omega}{2}$。

我们记最小本征值的那个态为 $|h,c\rangle$，自然，对于任意 $n > 0$，都有 $L_n|h,c\rangle = 0$。这个东西从数学上讲应该是 lowest weight 态，但出于某些历史原因，我们仍称之为 highest weight 态（这也许是认为 L_n 的下标 $n > 0$ 很容易让人认为是升算符吧）。

反过来问，本征值可以任意大吗？原则上是可以的，还是回忆谐振子，n 可以取到任意正整数。所以 Virasoro 代数的子空间 V^c 都是无穷维的。

现在，我们已经有了本征值最小的态 $|h,c\rangle$，也有了升高本征值的算符 $L_{-n}, n > 0$，则可以构建出子空间 V^c 的本征态了：$|h,c\rangle, L_{-1}|h,c\rangle, L_{-2}|h,c\rangle, L_{-1}^2|h,c\rangle \ldots$，这些本征态称 descendant 态，而它们所成的集合称为 Verma 模。

站在 Virasoro 表示的角度上，我们再回顾之前证明玻色弦能自洽存在的维度是 26 维的过程。

首先我们

最后，自洽的玻色弦体系必然要求 $a = 1, c = 26$。实际上就是选择了一个特定的 V^c，以及所有物理态都是 weight 为 1 的态。

当时我们把 Viraoso constrain 人为改为 $L_m - a\delta_{m,0}|\phi\rangle = 0, m \geq 0$，其实就是说 $|\phi\rangle$ 是以 a 为本征值的 highest weight 态，而引入的伪态 $|\psi\rangle = \sum_{n>0} L_{-n}|\kappa_n\rangle$ 中的 $|\kappa_n\rangle$ 已经证明其本征值是 $a-n$，它与 descendant 态恰好对立，原本是不存在的态，但把它作为一个中介，再通过 L_{-n} "降" 回到 descendant 态去得到的 $|\psi\rangle$ 具有某些物理态的性质（如正交性），我们称之为伪态并拿来使用。

8.7.1 Vacuum State

我们希望真空态 $|0\rangle$ 具有尽可能多的对称性，即尽可能多的 L_n 湮灭它，它首先当然是 Hilbert 空间里的态，所以 $n > 0$ 的部分是可以湮灭的。如果我们取 h=0，则 L_0 也可以湮灭，再注意到：$[L_n, L_{-n}]|0\rangle = L_nL_{-n}|0\rangle = (2L_0 + \frac{c}{12}(n^3-n))|0\rangle = \frac{c}{12}(n^3-n)|0\rangle$，很容易验证令 $L_{-1}|0\rangle = 0$ 不会引起矛盾，但除此（及 n=0,1）之外等式最右边都不为零，所以不能令此时的

$L_{-n}|0\rangle = 0$。

这样，我们就找到了具有最多算符湮灭它的真空态：$|0\rangle$，满足 $L_n|0\rangle = 0, n = -1, 0, 1, 2...$。我们看到其中包括了 global conformal transformation，即真空态在全局变换下不变。

借助真空态，我们可以讨论一点有趣的内容。

前面得出的中心荷 c 作为理论的一个和谐部分，取值是否受限? 比如它可以是虚数吗? 可以为负吗? 我们将证明，它总是非负实数：$\langle 0|[L_2, L_{-2}]|0\rangle = \langle L_2L_{-2}\rangle - \langle L_{-2}L_2\rangle = (L_{-2}|0\rangle)^2 \geq 0$，同时根据 Virasoro 代数，我们有上式为：$\langle 4L_0 + \frac{c}{2}\rangle = \frac{c}{2}(|0\rangle)^2$，态的模方肯定非负，所以 $c \geq 0$。

并且，利用 Viraosoro constrain，我们还可以得到：$\langle 0|T(w)T(z)|0\rangle = \frac{c}{(w-z)^4}\langle 0|0\rangle + \langle 0|\sum_{n\in\mathcal{N}} z^{-n-2}L_n|0\rangle + \langle 0|\sum_{n\in\mathcal{N}}(-n-2)z^{-n-3}L_n|0\rangle = \frac{c}{(w-z)^4}\langle 0|0\rangle$

8.7.2 Conformal Field as Operator

前面我们把 highest weight 的本征值记做 h 是有所用意的，原因将在此章揭晓：一个 conformal weight 为 h 的 primary field $\Phi(z, \bar{z})$ 作用在 $z = 0$ 的真空态上，将生成一个本征值为 h 的 highest weight 态，即：

$$\Phi(0, \bar{0})|0\rangle = |h, c\rangle$$

当然，原则上后面生成的态应该是 $|h, \bar{h}, c, \bar{c}\rangle$，但由于 c 总是非负实数，所以 $c = \bar{c}$，并且我们现在只讨论 holomorphic 部分。

假定上述论述成立，则我们有：$L_n\Phi(0)|0\rangle = 0, \forall n > 0, L_0\Phi(0)|0\rangle = h\Phi(0)|0\rangle$，所以应该有：

$$[L_n, \Phi(0)]|0\rangle = 0, \forall n > 0$$

这个对易子是可以计算的：

$$\begin{aligned}
[L_n, \Phi(0)] &= \lim_{z\to 0}[L_n, \Phi(z)] \\
&= \lim_{z\to 0}\oint \frac{dw}{2\pi i} w^{n+1} T(w)\Phi(z) \\
&= \lim_{z\to 0}\oint \frac{dw}{2\pi i} w^{n+1}[\frac{h\Phi(z)}{(w-z)^2} + \frac{\partial_z\Phi(z)}{w-z}] \\
&= \lim_{z\to 0}[h(n+1)z^n\Phi(0) + z^{n+1}\partial_z\Phi(0)]
\end{aligned}$$

可以看出，当 $n > 0$ 时，这个对易子是 0，当 $n = 0$ 时，恰好是 $h\Phi(0)$，满足要求，即证。

所以，在 CFT 中，一个 primary field 同一个 highest weight 态是一一对应的。不过，除了这个态以外，我们还有 descendant 态，它们是否也与某些场对应呢？注意到这些态具有统一的形式：$L_{-n}|h,c\rangle, n>0$，它等价于：$\oint \frac{dw}{2\pi i} w^{-n+1} T(w)\Phi(0)|0\rangle$。

现在我们构建如下的 descendant 场：$\hat{L}_{-n}\Phi(z)$，它作用在真空态上得到相应的 descendant 态：$\hat{L}_{-n}\Phi(0)|0\rangle = L_{-n}|h,c\rangle$，则有：

$$\oint \frac{dw}{2\pi i} w^{-n+1} T(w)\Phi(0)|0\rangle = \hat{L}_{-n}\Phi(0)|0\rangle$$

根据 Cauchy 积分公式，我们得到：

$$T(w)\Phi(0) = \sum_{n>0} w^{n-2} \hat{L}_{-n}\Phi(0)$$

根据 T 对 ϕ 的展开，就能求出相应的 descendant 场。

值得一提的是，尽管现在的 n 取值是正数，但对于 $n = 0$ 也成立：$\hat{L}_0\Phi(0)|0\rangle = L_0|h,c\rangle = h|h,c\rangle$，而 $T(w)\Phi(0)$ 的展开中恰好有 $\frac{h\Phi(0)}{w^2}$，所以 $\hat{L}_0\Phi(0) = h\Phi(0)$。

把 $n=0$ 的部分也加进去，上式就覆盖了 OPE，只不过还包含了原本 OPE 中扔掉的部分。

这些场未必是 primary field，但我们仍然可以将 L_0 作用在相应的 descendant 态得到的本征值作为其 conformal weight：$L_0 L_{-n}|h,c\rangle = [L_0, L_{-n}] + L_{-n}L_0|h,c\rangle = (h+n)|h,c\rangle$，即 $\hat{L}_{-n}\Phi(z)$ 的 conformal weight 是 $h+n$。

8.8 Ward Identity

在 OPE 的部分，我们引入了一个重要的等式：$\delta\Phi = [Q,\Phi]$，这只涉及了一个场，而我们知道在 QFT 中尤其重要的是 n-point 函数：$\langle \Phi_1(w_1)\Phi_2(w_2)...\Phi_n(w_n)\rangle$，它涉及了 n 个场在不同点的值，它在共形变换下如何变换？我们将推广之前的等式，得到 conformal Ward indentity。

我们知道，在经过 Radial Ordering 之后，$[Q,\Phi]$ 就变成了 $\oint \frac{dz}{2\pi i}\epsilon(z) R(T(z)\Phi(w))$，由于 quasi-primary field 的 OPE 没有固定形式，所以我们只考虑 primary field，现在我们把 $\Phi(w)$ 换成 n-point 函数：

$$\langle \oint \frac{dz}{2\pi i}\epsilon(z) T(z)\Phi_1(w_1)\Phi_2(w_2)...\Phi_n(w_n)\rangle$$

它在 z 的积分围道内有 n 个极点，根据复分析的知识我们可以把这个围道分解为 n 个分别绕 w_i 的小围道之和：

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\langle\Phi_1(w_1)...[\oint\frac{dz}{2\pi i}\epsilon(z)T(z)\Phi_i(w_i)]...\Phi_n(w_n)\rangle\\
=&\sum_{i=1}^{n}\langle\Phi_1(w_1)...[\oint\frac{dz}{2\pi i}\epsilon(z)(\frac{h_i\Phi_i(w_i)}{(z-w_i)^2}+\frac{\partial_{w_i}\Phi_i(w_i)}{z-w_i})]...\Phi_n(w_n)\rangle\\
=&\oint\frac{dz}{2\pi i}\epsilon(z)\sum_{i=1}^{n}(\frac{h_i}{(z-w_i)^2}+\frac{\partial_{w_i}}{z-w_i})\langle\Phi_1(w_1)...\Phi_i(w_i)...\Phi_n(w_n)\rangle
\end{aligned}$$

第二步用到了对 Primary field 的 OPE，于是跟之前的式子对比得到：

$$\begin{aligned}
&\langle T(z)\Phi_1(w_1)\Phi_2(w_2)...\Phi_n(w_n)\rangle\\
=&\sum_{i=1}^{n}(\frac{h_i}{(z-w_i)^2}+\frac{\partial_{w_i}}{z-w_i})\langle\Phi_1(w_1)...\Phi_i(w_i)...\Phi_n(w_n)\rangle
\end{aligned}$$

这个式子就是 conformal Ward identity。

注意，得到这个式子时，我们是利用了积分相等时被积函数的等价性，但显然，假如两个积分本身恒为零，这一步就有问题了，但幸运的是，这只对全局共形变换才可能成立，我们可以单独来研究这种情况。

积分为零表示 $[Q,\langle\Phi_1...\Phi_n\rangle]=0$，所以 $\delta\langle\Phi_1...\Phi_n\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle\Phi_1...\delta\Phi_i...\Phi_n\rangle=0$，即场是不变的，对于 primary field，我们已经知道在全局共形变换下 $\delta\Phi$ 的形式，带入便分别有：

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\partial_{w_i}\langle\Phi_1...\Phi_i...\Phi_n\rangle=0\\
&\sum_{i=1}^{n}(h_i+w_i\partial_{w_i})\langle\Phi_1...\Phi_i...\Phi_n\rangle=0\\
&\sum_{i=1}^{n}(2h_iw_i+w_i^2\partial_{w_i})\langle\Phi_1...\Phi_i...\Phi_n\rangle=0
\end{aligned}$$

算上这三个等式，便是完整的 conformal Ward identity。

8.8.1 n-Point Function

我们根据 Ward identity 来确定几个关联函数的形式，这在一般情况下是做不到的，但关联函数所具有的共形不变性表示它具有高度对称性，故可以精确求得。

我们将只计算 global 变换对应的 Ward identity，因为对于 2 维以外的 CFT 一般是没有 local 共形变换的。

接下来为了方便，我们简记 $\langle \Phi_1 ... \Phi_n \rangle = f$。

对于 1-point 函数，易证它是一个常数，可取其为 0。

对于 2-point 函数，我们有：

$$\begin{aligned} \partial_1 f + \partial_2 f &= 0 \\ w_1 \partial_1 f + w_2 \partial_2 f + (h_1 + h_2) f &= 0 \\ w_1^2 \partial_1 f + w_2^2 \partial_2 f + (2h_1 w_1 + 2h_2 w_2) f &= 0 \end{aligned}$$

由第一个式子得到 f 具有形式：$\frac{c}{(w_1 - w_2)^n}$，其中 c 和 n 都是待定常数，带入第二个式子得到：$h_1 + h_2 = n$，带入第三个式子得到：$h_1 = h_2$，所以有：

$$\langle \Phi_1(w_1) \Phi_2(w_2) \rangle = \frac{c}{(w_1 - w_2)^{2h}}$$

对于 3-point 函数，我们有：

$$\begin{aligned} \partial_1 f + \partial_2 f + \partial_3 f &= 0 \\ w_1 \partial_1 f + w_2 \partial_2 f + w_3 \partial_3 f + (h_1 + h_2 + h_3) f &= 0 \\ w_1^2 \partial_1 f + w_2^2 \partial_2 f + w_3^2 \partial_3 f + (2h_1 w_1 + 2h_2 w_2 + 2h_3 w_3) f &= 0 \end{aligned}$$

由第一个式子得到 f 具有形式：$\frac{c}{(w_1 - w_2)^i (w_2 - w_3)^j (w_3 - w_1)^k}$，其中 c, i, j, k 都是待定常数，带入第二个式子得到：$h_1 + h_2 + h_3 = i + j + k$，带入第三个式子得到：

$$\begin{aligned} i &= h_1 + h_2 - h_3 \\ j &= h_2 + h_3 - h_1 \\ k &= h_3 + h_1 - h_2 \end{aligned}$$

所以 3-point 函数具有统一形式：$\frac{c}{(w_1 - w_2)^{h_1 + h_2 - h_3} (w_2 - w_3)^{h_2 + h_3 - h_1} (w_3 - w_1)^{h_1 + h_3 - h_2}}$。

其实根据以上几个例子，我们已经看出来这种 n-point 函数所遵循的形式具有一些共同特征：都具有 $\frac{c}{(w_1 - w_2)^{a_1} ... (w_n - w_1)^{a_n}}$ 的形式，且满足 $h_1 + ... + h_n = a_1 + ... + a_n$，但具体去计算就会发现，当 $n \geq 4$ 时，Ward identity 无法唯一确定函数，如 4-point 函数前会多一个 Mobius 不变的交比式，计算它们需要更多的信息，一般来说超出了 CFT 的范畴，但二维 CFT 还独有无穷多个 local 变换，我们可以通过它们对应的那些 Ward identity 进一步确定其形式，但我们不在此展开。